

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. (4 Punkte) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion auf einem reellen Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left| \int_a^b \Re(e^{is} f(t)) dt \right| \leq \left| \int_a^b f(t) dt \right|.$$

2. (4 Punkte) Zeige, dass für jede stetige Funktion $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{\int_{S^1} f(z) dz} = - \int_{S^1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

3. (4 Punkte) Finde eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, die eine Stammfunktion von $\frac{1}{2+z^3}$ in einer Umgebung von 0 darstellt.

4. (4 Punkte) Berechne die folgenden Wegintegrale mit Hilfe des Begriffs der Stammfunktion:

a) $\int_{[-i, i]} z^4 dz$; b) $\int_{[0, 3\pi i/2]} e^z dz$; c) $\int_{[0, \pi + i\pi]} \sin(z) dz$.

5. (4 Punkte) Sei Γ ein Integrationsweg mit der unten gezeichneten Spur. Berechne $\int_{\Gamma} \frac{z-1}{(z^2-2z+2)^2} dz$.

