

Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

- (4 Punkte) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um z_0 und bestimmen den Konvergenzradius:
 - $f(z) = e^{2iz}$, $z_0 = \pi/2$;
 - $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$, $z_0 = i$.
- (2 Punkte) Bestimme die größte offene Kreisscheibe, auf der $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{\pi^n} (z-i)^n$ konvergiert.
- (6 Punkte) Finde alle komplexe Lösungen der folgenden Gleichungen:
 - $\sin(z) = \frac{12i}{5}$;
 - $\tan(z) = \frac{5}{4}$;
 - $e^z = i$.
- (3 Punkte) Berechne die ersten vier Glieder $a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$ der Potenzreihe von $f(z) = \tan(z)$ um $z_0 = 0$.
- (2 Punkte) Entwickeln Sie $\sin^2(z)$ in eine Potenzreihe um 0.
- (3 Punkte) Beweise, dass $\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}\right) = 1 + z$ für alle z mit $|z| < 1$. (Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung von dem Quotienten $\frac{\text{linke Seite}}{\text{rechte Seite}}$.)