Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. *(5 Punkte)* Welche der Mengen

$$X_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Re(z) < 1\}, \quad X_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im(z) \geq 0\}, \quad X_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\},$$

$$X_4 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| \leq 2\}, \quad X_5 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \text{ oder } |z| > 2\}$$

sind

a) offen? b) abgeschlossen? c) beschränkt? d) kompakt? e) Gebiete?

2. *(5 Punkte)* Beweise den folgenden Teil des Satzes von Heine-Borel (Satz 1.6 im Skript): Jede kompakte Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt.

3. *(5 Punkte)* Zeige, dass die Funktion $f(z) = |z|^{2n}$, $n \geq 1$, auf keinem Gebiet holomorph ist.

4. *(5 Punkte)* Für welche reelle Konstante a ist die Funktion

$$f(z) = x^2 - y^2 + iaxy \qquad (z = x + iy)$$

holomorph?

Abgabe bis Mittwoch, den 25. Oktober 2017, in der Übung