Übungsaufgaben zur Funktionentheorie

1. *(4 Punkte)* Zeige, dass für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)}\, dz = 0.$$

   (Hinweis: Man kann die Aufgabe 5 aus dem Blatt 8 verwenden, um eine Stammfunktion von $\frac{1}{z(z-1)}$ auf $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ zu konstruieren.)

2. *(4 Punkte)* Sei f eine ganze Funktion f, die die Bedingung

$$\Re(f^{(n)}(z)) \geq 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

   erfüllt. Folgere aus dem Satz von Liouville, dass f ein Polynom vom Grad n ist.

3. *(4 Punkte)* Berechne die Ordnung der Nullstelle oder des Pols von $f(z)$ bei z_0:

   a) $f(z) = (iz-1)(1+z^2)^2, \quad z_0 = -i;$ b) $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{(z^2-\pi)^5}, \quad z_0 = \sqrt{\pi}.$

4. *(4 Punkte)* Finde zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{O}(B_1(0))$, so dass einerseits $f \neq g$ und andererseits $f(z_i) = g(z_i)$ für unendlich viele Punkte $z_i \in B_1(0)$ gilt.

5. *(4 Punkte)* Finde alle komplexen Zahlen $c \in \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine nicht konstante ganze Funktion f, so dass gilt:

$$f(cz) = f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Abgabe bis Mittwoch, den 10. Januar 2018, in der Übung