Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(6 Punkte)*
   (a) Die Permutation $\sigma \in S_n$ bestehe aus k Zykeln der Längen $l_1, ..., l_k$ mit paarweise disjunkten Trägern. Geben Sie Formeln für die Ordnung von σ und das Signum von σ an.
   (b) Schreiben Sie die Permutationen
   $$\alpha := (8\ 7\ 6\ 5\ 4)(3\ 2\ 1)(7\ 5\ 3\ 1) \text{ und } \beta := (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$$
   als Produkte von zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und berechnen Sie ihre Ordnungen und ihre Vorzeichen.

2. *(6 Punkte)* Zur Erinnerung: Zwei Elemente a und b einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls es ein Element $c \in G$ gibt mit $b = cac^{-1}$.
   (a) Zeigen Sie: Ist $\rho = (a_1 a_2 ... a_l) \in S_n$ eine zyklische Permutation und ist $\sigma \in S_n$, so ist
   $$\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2)...\sigma(a_l)),$$
   insbesondere ist $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$ zyklisch und hat dieselbe Ordnung wie ρ.
   (b) $\alpha_1, ..., \alpha_k \in S_n$ seien zyklische Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und mit $\mathrm{ord}(\alpha_1) \geq \mathrm{ord}(\alpha_2) \geq ... \geq \mathrm{ord}(\alpha_k)$; ebenso seien $\beta_1, ..., \beta_l \in S_n$ zyklische Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und mit $\mathrm{ord}\beta_1) \geq \mathrm{ord}(\beta_2) \geq ... \geq \mathrm{ord}(\beta_k)$; es sei
   $$\varphi := \alpha_1 \circ ... \circ \alpha_k \text{ und } \psi := \beta_1 \circ ... \circ \beta_l.$$
   Zeigen Sie: φ und ψ sind genau dann konjugiert, wenn $k = l$ und $\mathrm{ord}(\alpha_i) = \mathrm{ord}(\beta_i)$ für $i = 1, 2, ..., k$ ist.

3. *(3 Punkte)* Die Kleinsche Vierergruppe ist die folgende Untergruppe von S_4
   $$V_4 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$
   Zeigen Sie:
   (a) $V_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
   (b) $V_4 < A_4$,
   (c) V_4 ist ein Normalteiler in S_4 und in A_4.

4. *(4 Punkte)* Prove the following statement (one direction in Theorem 2.45(2)) without referring to the solvability criterion (Theorem 2.44):
   Let G be a group and $H \lhd G$ be a normal subgroup. Suppose both H and G/H are solvable. Then G is solvable.
   Hint: Fix normal series with abelian quotients for H and G/H: $\{e_H\} = H_m \subset H_{m-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = H$ and $\{e_{G/H}\} = \widetilde{G}_n \subset \widetilde{G}_{n-1} \subset \ldots \subset \widetilde{G}_1 \subset \widetilde{G}_0 = G/H$. Let π denote the canonical projection $G \twoheadrightarrow G/H$ and $G_i := \pi^{-1}(\widetilde{G}_i)$. A normal series with abelian quotients for G can be built from $H_m \subset \ldots \subset H_0$ and $G_n \subset \ldots \subset G_0$ (Theorem 2.13 may help).

Abgabe bis Mittwoch, den 9. Mai 2018, in der Übung