Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Sei G eine Menge, $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$, eine assoziative Verknüpfung (multiplikativ geschrieben, ohne Verknüpfungssymbol), $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, eine Abbildung und $e \in G$ ein Element mit den Eigenschaften:

   (i) e ist eine Linkseins, d.h. $\forall\, a \in G \quad ea = a$,

   (ii) a^{-1} ist ein Linksinverses von a, d.h. $a^{-1}a = e$.

   Zeigen Sie:

   (a) a^{-1} erfüllt auch $aa^{-1} = e$ (ist also auch ein Rechtsinverses). Hinweis: Betrachten Sie $(a^{-1})^{-1}a^{-1}aa^{-1}$.

   (b) e erfüllt auch $ae = a$ (ist also auch eine Rechtseins).

   Fazit: eine Menge G mit assoziativer Verknüpfung mit Linkseins und Linksinversen ist eine Gruppe.

2. *(4 Punkte)* Beweisen Sie den *2. Isomorphiesatz* für Gruppen:
   Sind H und K Normalteiler einer Gruppe G und ist $K \subset H$, so ist H/K Normalteiler von G/K, und es ist
   $$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

3. *(4 Punkte)* Die *Diedergruppe* D_n ist die Gruppe der Spiegelungen und Drehungen der Ebene $\mathbb{R}^2$, die ein regelmäßiges n-Eck mit Mittelpunkt 0 invariant lassen. Es ist $D_n = \{d_0, d_1, ..., d_{n-1}, s_0, s_1, ..., s_{n-1}\}$, wobei d_l die Drehung um den Winkel $l \cdot 2\pi/n$ ist, s_0 irgendeine Spiegelung und s_k für $k \in \{1, ..., n-1\}$ die Spiegelung an der Spiegelachse mit Winkel $k \cdot \pi/n$ zur Spiegelachse von s_0.

   (a) Geben Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe D_n an.

   (b) Wieviele Konjugationsklassen von Spiegelungen gibt es in D_n?

4. *(4 Punkte)* Sei $\phi\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Ist $U < G$ eine Untergruppe, dann ist $\phi(U) \subset G'$ eine Untergruppe.

   (b) Finden Sie ein Gegenbeispiel, welches zeigt das die Aussage (a) für Normalteiler im Allgemeinen falsch ist.

   (c) Ist $U' < G'$ eine Untergruppe (resp. ein Normalteiler), dann ist $\phi^{-1}(U') \subset G$ eine Untergruppe (resp. ein Normalteiler) von G.

Abgabe bis Mittwoch, den 25. April 2018, in der Übung