Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(6 Punkte)* Sei $f(x) = x^3 + px + q \in K[x]$ ein kubisches irreduzibles Polynom und $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$.
   Zeigen Sie: Die Galoissgruppe von f ist isomorph zu S_3 genau dann, wenn $\Delta := -4p^3 - 27q^2$ kein Quadrat in K ist. Wenn Δ ein Quadrat in K ist, dann ist die Galoisgruppe zyklisch der Ordnung 3 und somit isomorph zur alternierenden Gruppe A_3.

Hinweise: Zeigen Sie:

  i. f ist separabel.
  ii. Ist α eine Nullstelle von f, so ist $[K(\alpha) : K] = 3$.
  iii. Ist L ein Zerfällungskörper von f, dann kann $\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(L/K)$ mit einer Untergruppe von S_3 der Ordnung 3 oder 6 identifiziert werden. Es ist also $\mathrm{Gal}(f)$ isomorph zu A_3 oder S_3.
  iv. Sei $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ mit $\alpha_i \in L$, $\delta := (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$. Dann ist $\Delta = \delta^2$ (siehe die erste Vorlesung).
  v. Das Element δ wird von der Menge der geraden Permutationen fixiert.

  Folgern Sie: $\mathrm{Gal}(f)$ ist genau dann isomorph zu S_3, wenn Δ kein Quadrat in K ist.

2. *(4 Punkte)* Sei K ein Körper und $L \supset K$ eine Körpererweiterung so dass folgendes gilt. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ mit den Eigenschaften:

   (a) $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$,
   (b) $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$,
   (c) $f(x) := \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ ist in $K[x]$ irreduzibel.

   Zeigen Sie: $\mathrm{Gal}\,(L/K(\alpha_1))$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ vom Index n.

3. *(6 Punkte)* Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Körper, $n \geq 3$ eine Primzahl und $f(x) \in K[x]$ irreduzibel mit $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$. Nach Lemma 4.30 der Vorlesung sind alle Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ verschieden. Die Nullstellen seien so, dass gilt:

$$\alpha_3, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, \quad \text{also} \quad \overline{\alpha_1} = \alpha_2.$$

   Zeigen Sie: $\mathrm{Gal}\,(f) \cong S_n$.

Hinweise:

  i. Zeigen Sie, dass n die Ordung von $\mathrm{Gal}(f)$ teilt.
  ii. Folgern Sie die Existenz einer $n-$Sylowuntergruppe H in $\mathrm{Gal}(f)$.
  iii. Zeigen Sie, dass H zyklisch der Ordnung n ist und folgern sie die Existenz eines $n-$Zykels.
  iv. Zeigen Sie die Existenz einer Transposition in $\mathrm{Gal}(f)$.
  v. Zeigen Sie, dass für $m \geq 2$ S_m von $(1\ 2)$ und $(1 \ldots m)$ erzeugt wird. Dies können Sie in folgenden Schritten zeigen:
$$\langle (1\ 2), (1 \ldots m) \rangle \overset{!}{=} \langle (1\ 2), (2\ 3), \ldots, (m-1\ m) \rangle \overset{!}{=} S_m.$$
  vi. Folgern Sie aus den letzten 3 Aussagen, dass $\mathrm{Gal}\,(f) \cong S_n$ ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 11. Juli 2018, in der Übung