Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Sei $f = x^4 + 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Bestimme einen Zerfällungskörper L von f und den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ der Körpererweiterung $L \supset \mathbb{Q}$.
2. *(2 points)* Show: If L/K is a field extension of degree 2 then L/K is normal.
3. *(6 Punkte)* Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$, so dass $f(x) = x^5 - \alpha \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.
   (a) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper $L/\mathbb{Q}$ von f.
   (b) Bestimmen Sie ein primitives Element für $L/\mathbb{Q}$.
4. *(4 Punkte)* Geben Sie konkrete Beispiele für Körpererweiterungen L/K mit folgenden Eigenschaften an:
   (a) L/K ist separabel und nicht normal.
   (b) L/K ist normal und nicht separabel.
5. *(4 Punkte)* Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie :
   (a) K ist perfekt genau dann, wenn der Frobenius-Homomorphismus $F_p \colon K \to K, x \mapsto x^p$ surjektiv ist.
   (b) Folgern Sie das bereits aus der Vorlesung bekannte Resultat: Ist K ein endlicher Körper, so ist K perfekt.

   Bemerkung: Es ist für t transzendent $\mathbb{F}_p(t)$ über $\mathbb{F}_p$ nicht perfekt, da nach (a) die p^n-ten Wurzeln von t nicht in $\mathbb{F}_p(t)$ enthalten sind. Hingegen ist $\mathbb{F}_p(t)^{p^{-\infty}} := \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{F}_p(\sqrt[p^n]{t})$ perfekt, da alle p^n-ten Wurzeln enthalten sind. Allgemein können wir den *perfekten Abschluss* von K durch Adjunktion aller p^n-ten Wurzeln konstruieren. Neben Körpern der Charakteristik null, endlichen Körpern und algebraisch abgeschlossenen Körpern ist dies ein weiteres Beispiel eines perfekten Körpers.

Abgabe bis Mittwoch, den 4. Juli 2018, in der Übung