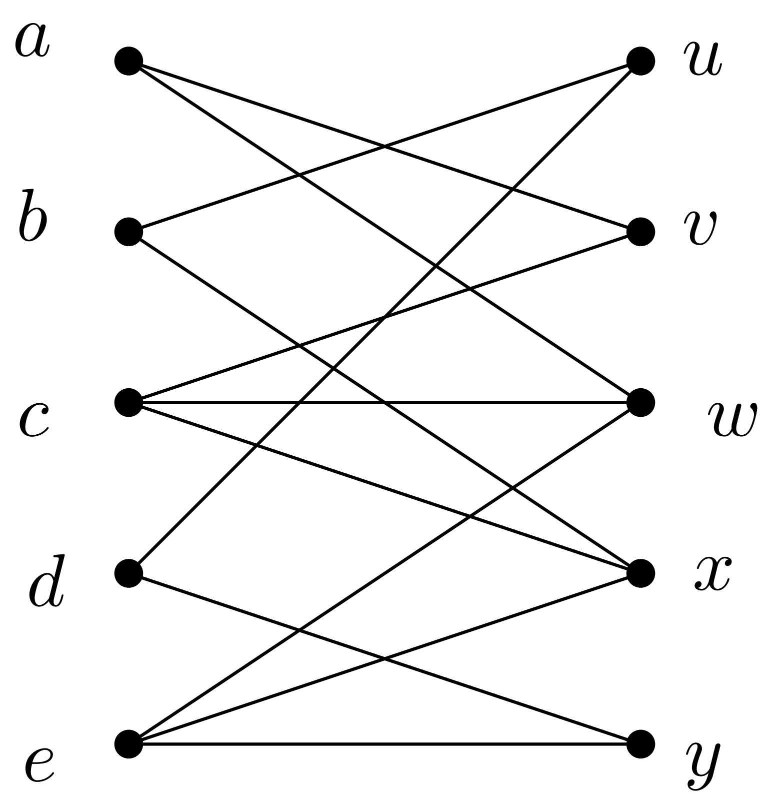
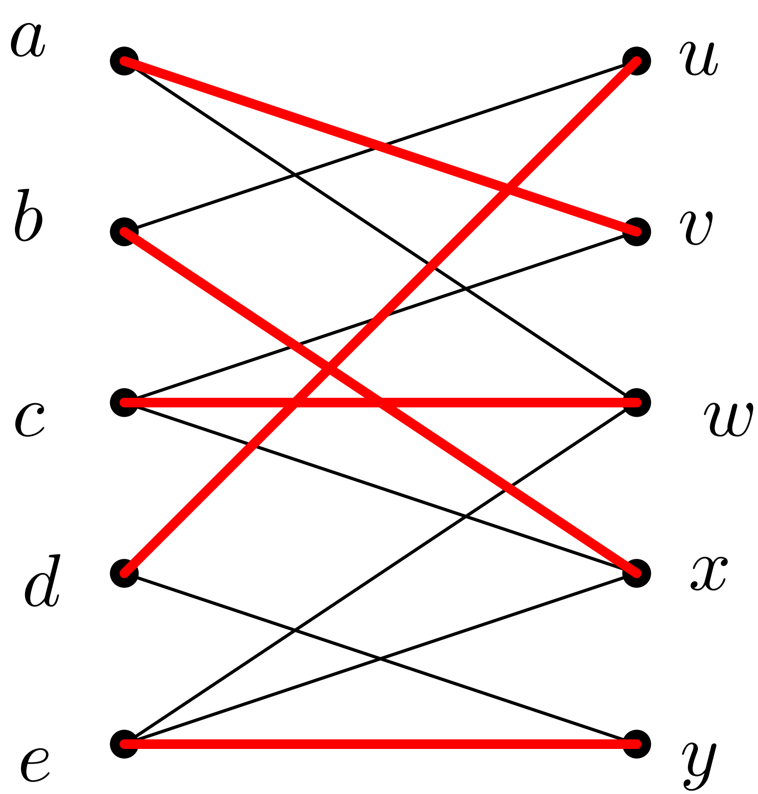
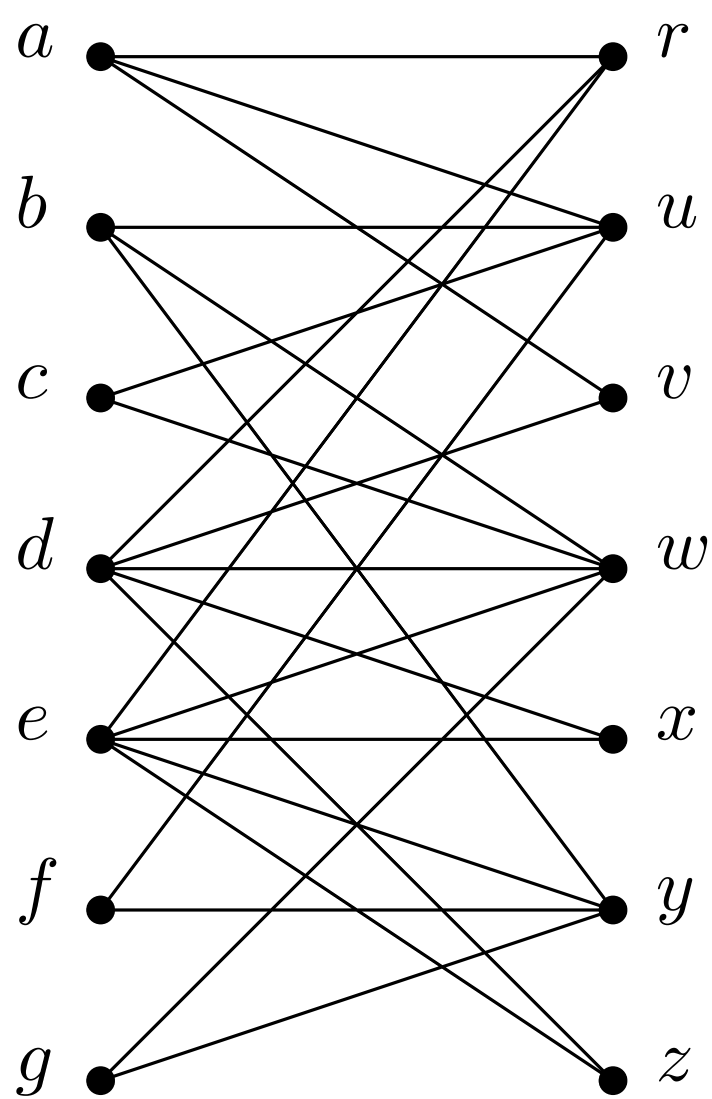
Matchings, Hall's and Kőnig's Theorem

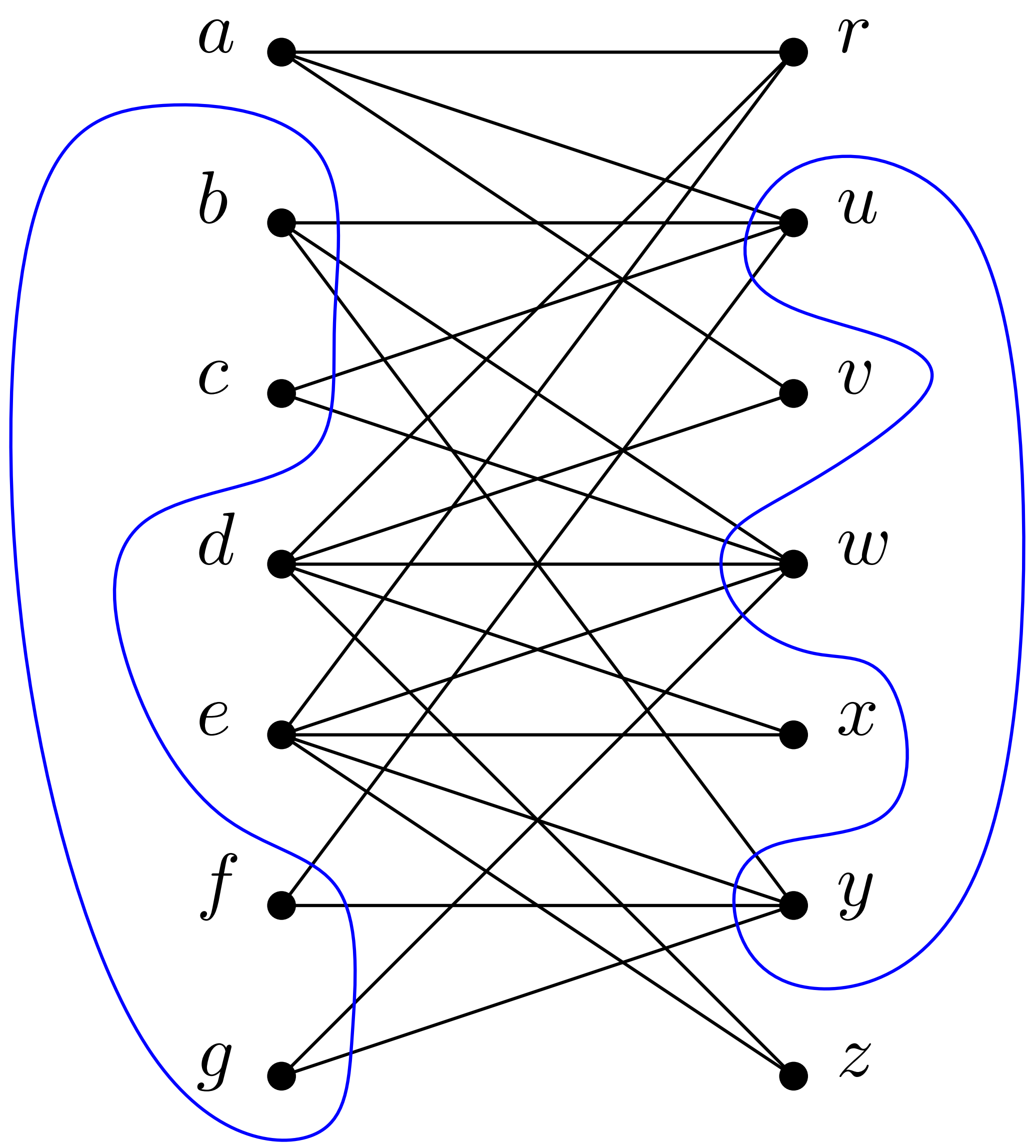
Slides by Dominik Scheder



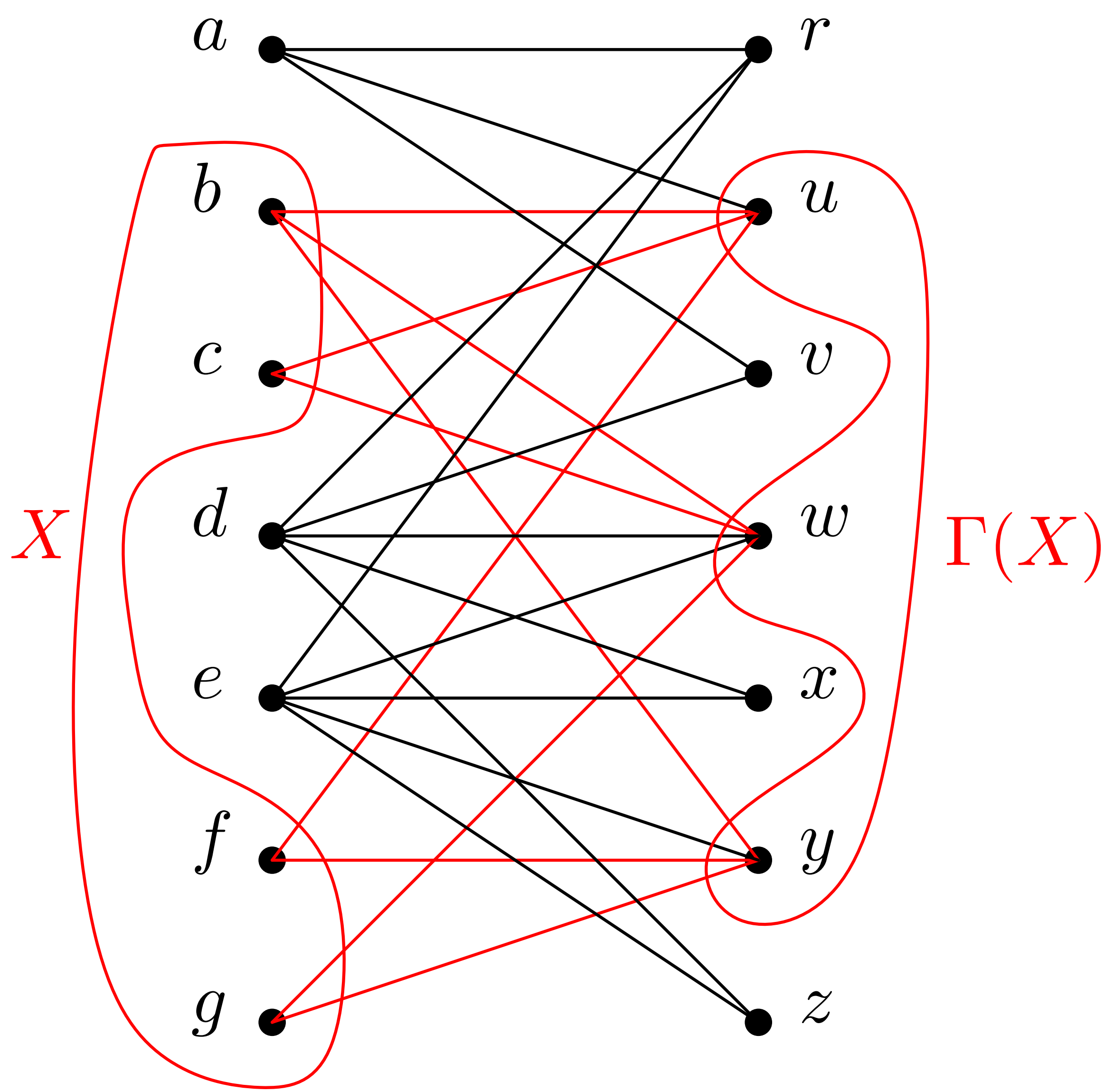
a
b
c
d
e
u
v
w
x
y


a
b
c
d
e
u
v
w
x
y

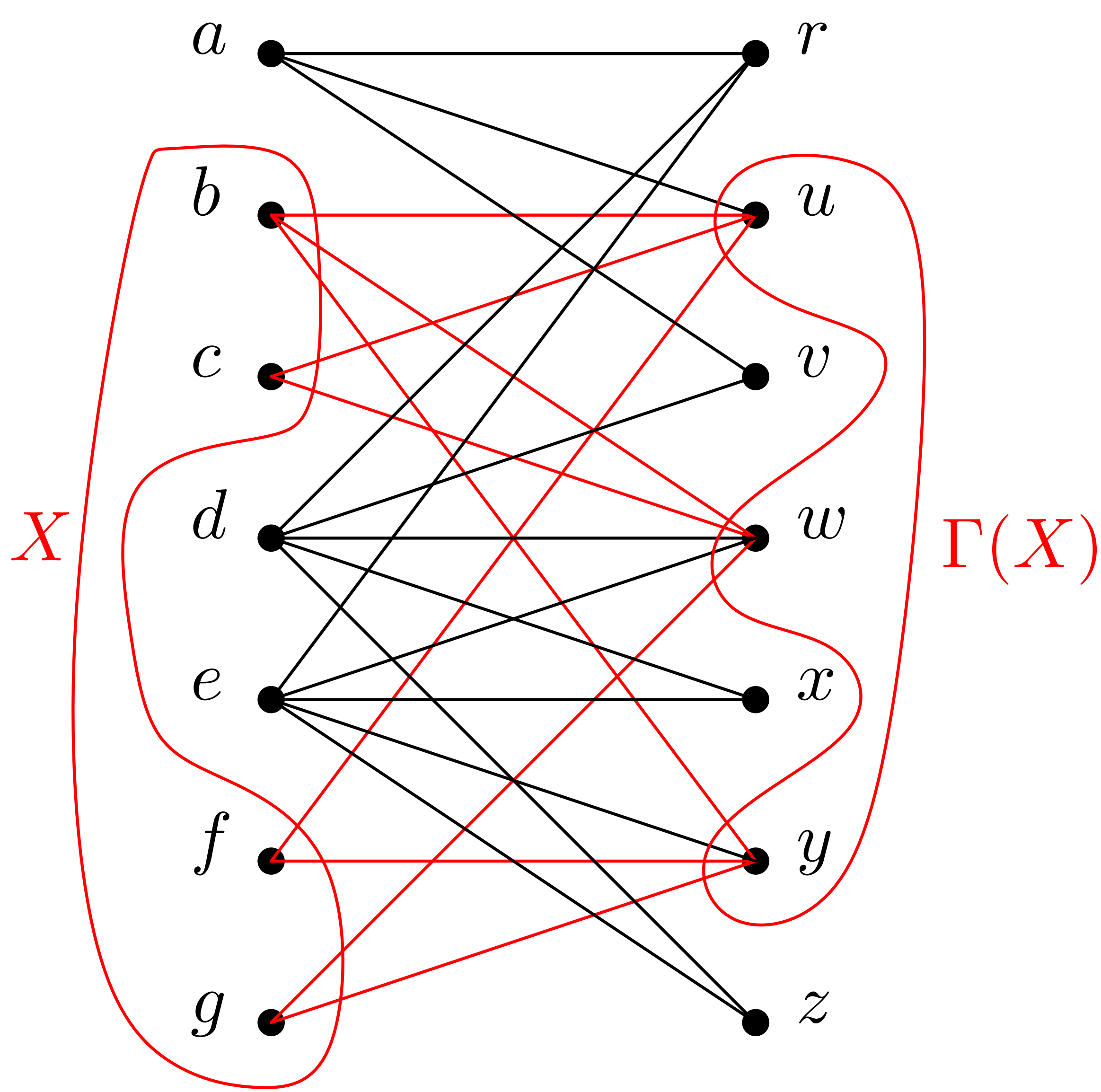

a
b
c
d
e
f
g
r
u
v
w
x
y
z



a
b
c
d
e
f
g
r
u
v
w
x
y
z

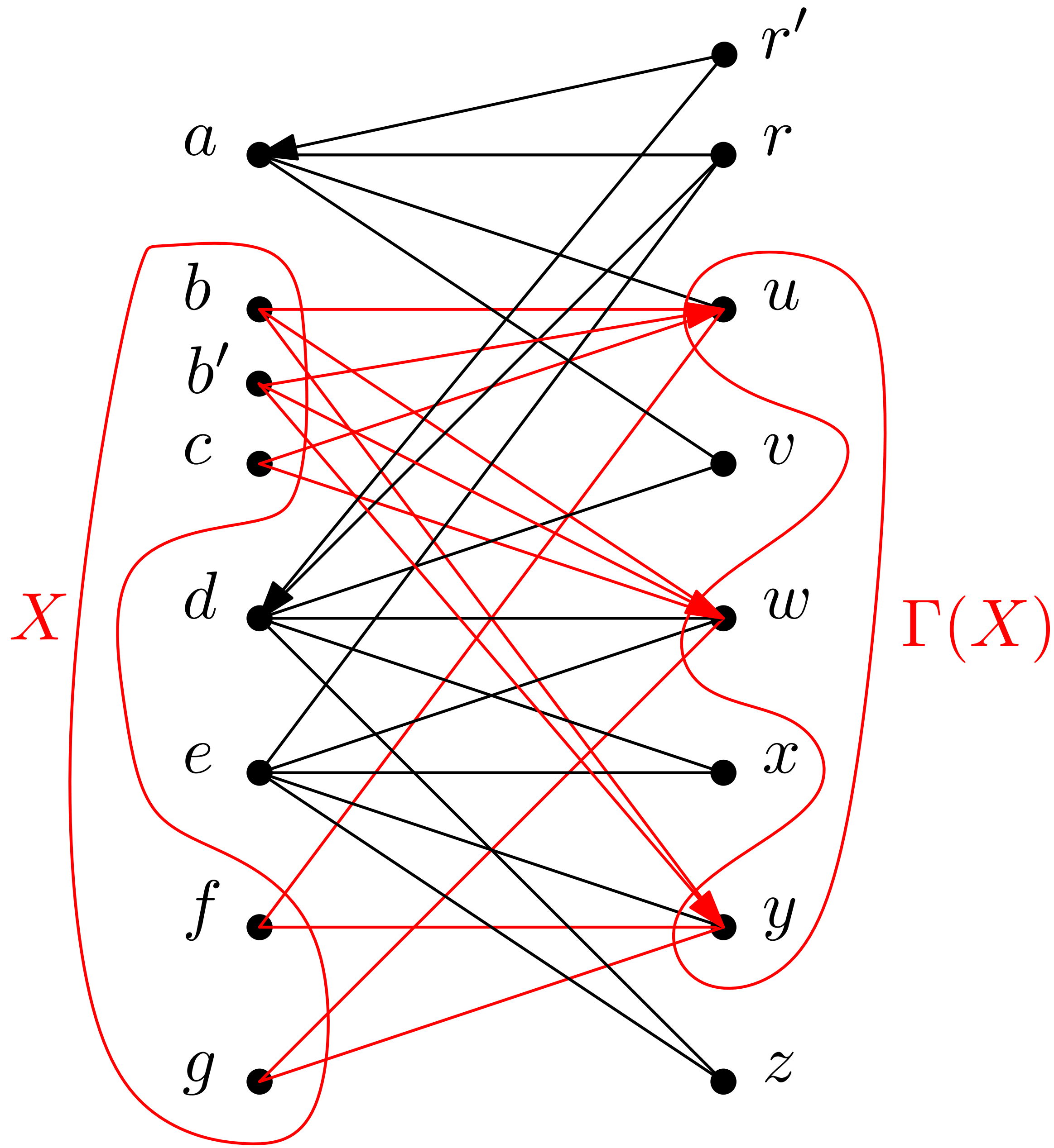


a
b
c
d
e
f
g
r
u
v
w
x
y
z
X
$\Gamma(X)$

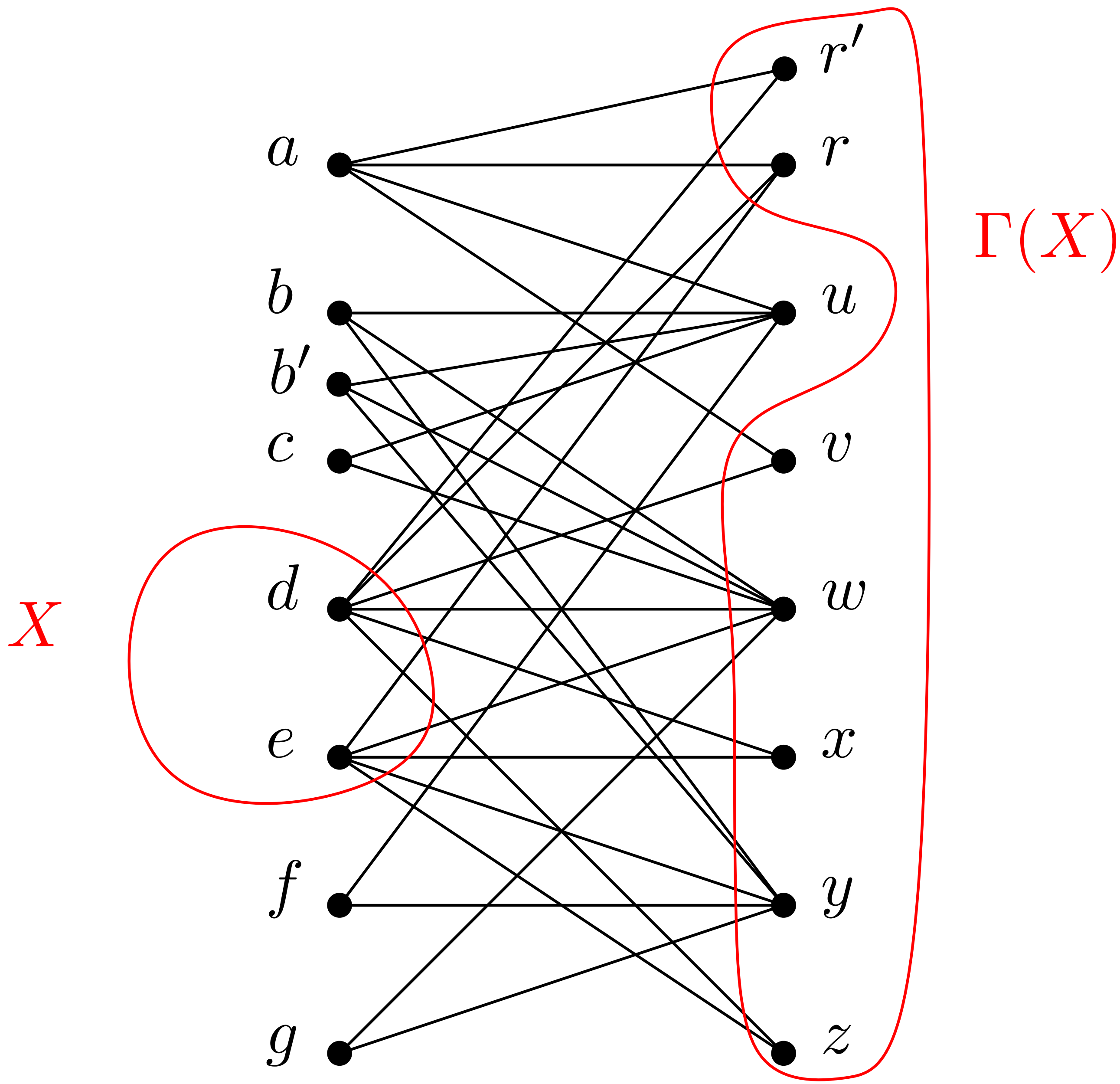


a
b
c
d
e
f
g
r
u
v
w
x
y
z
X
$\Gamma(X)$

Jedes Matching muss mindestens $|X| - |\Gamma(X)|$ Knoten der Menge X ungematcht lassen.



Jedes Matching muss mindestens $|X| - |\Gamma(X)|$ Knoten der Menge X ungematcht lassen.



Jedes Matching muss mindestens $|X| - |\Gamma(X)|$ Knoten der Menge X ungematcht lassen.

Sei $G = (L, R, E)$ ein bipartiter Graph. Die Defizienz von G, bezeichnet mit $\delta(G)$, ist definiert als

$$\delta(G) = \max_{X \subseteq L} |X| - |\Gamma(X)| \ .$$

Beobachtung: Jedes Matching M lässt mindestens $\delta(G)$ Knoten von L ungematcht.

Definition: $\nu(G)$ ist die Größe eines größten Matchings in G.

Beobachtung: $\nu(G) \leq |L| - \delta(G)$.

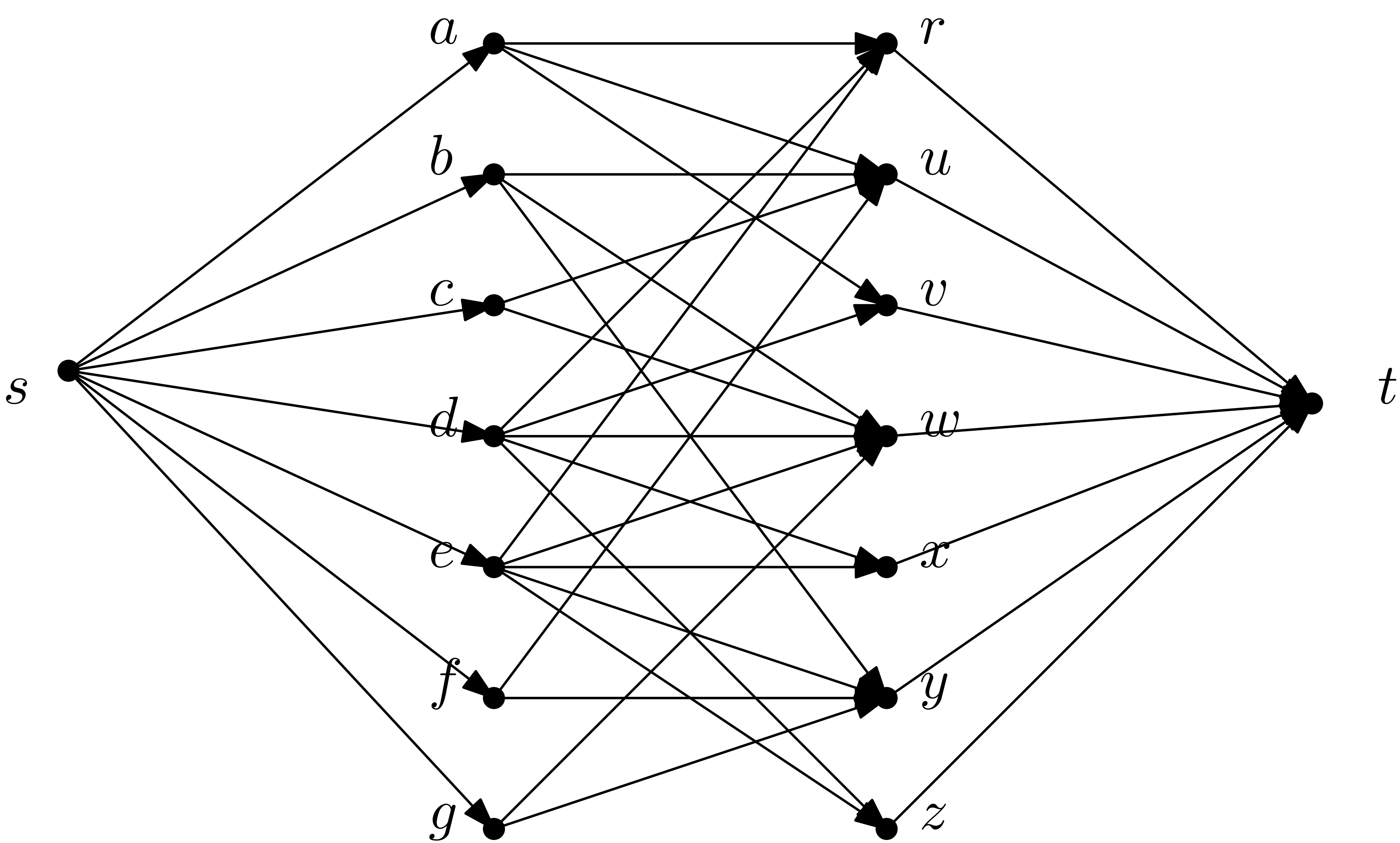
Sei $G = (L, R, E)$ ein bipartiter Graph. Die Defizienz von G, bezeichnet mit $\delta(G)$, ist definiert als

$$\delta(G) = \max_{X \subseteq L} |X| - |\Gamma(X)| \, .$$

Definition: $\nu(G)$ ist die Größe eines größten Matchings in G.

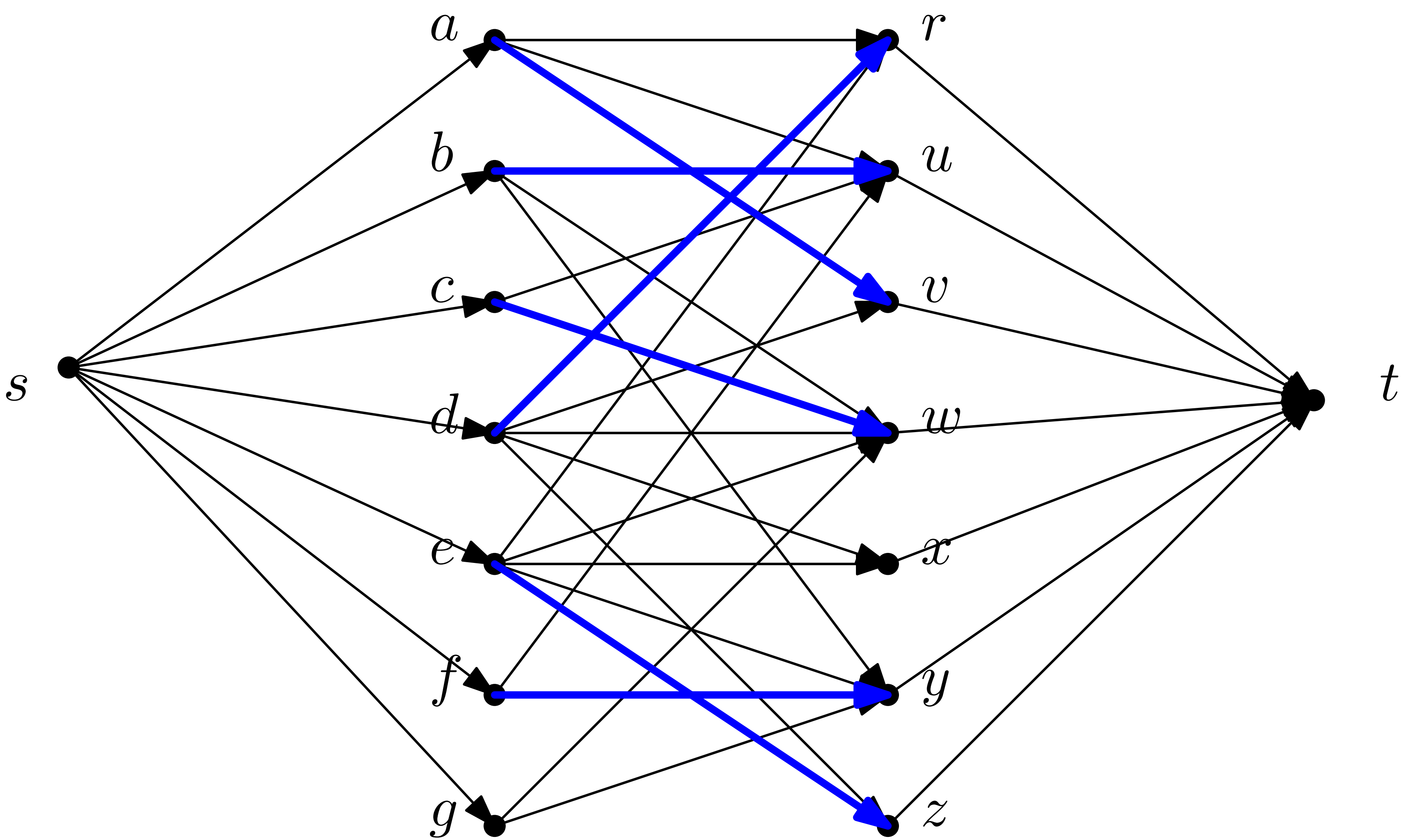
Beobachtung: $\nu(G) \leq |L| - \delta(G)$.

- Wie finde ich das größte Matching M?
- Wie finde ich ein $X \subseteq L$, dass $|X| - |\Gamma(X)|$ maximiert?
- Gilt immer $\nu(G) = |L| - \delta(G)$?

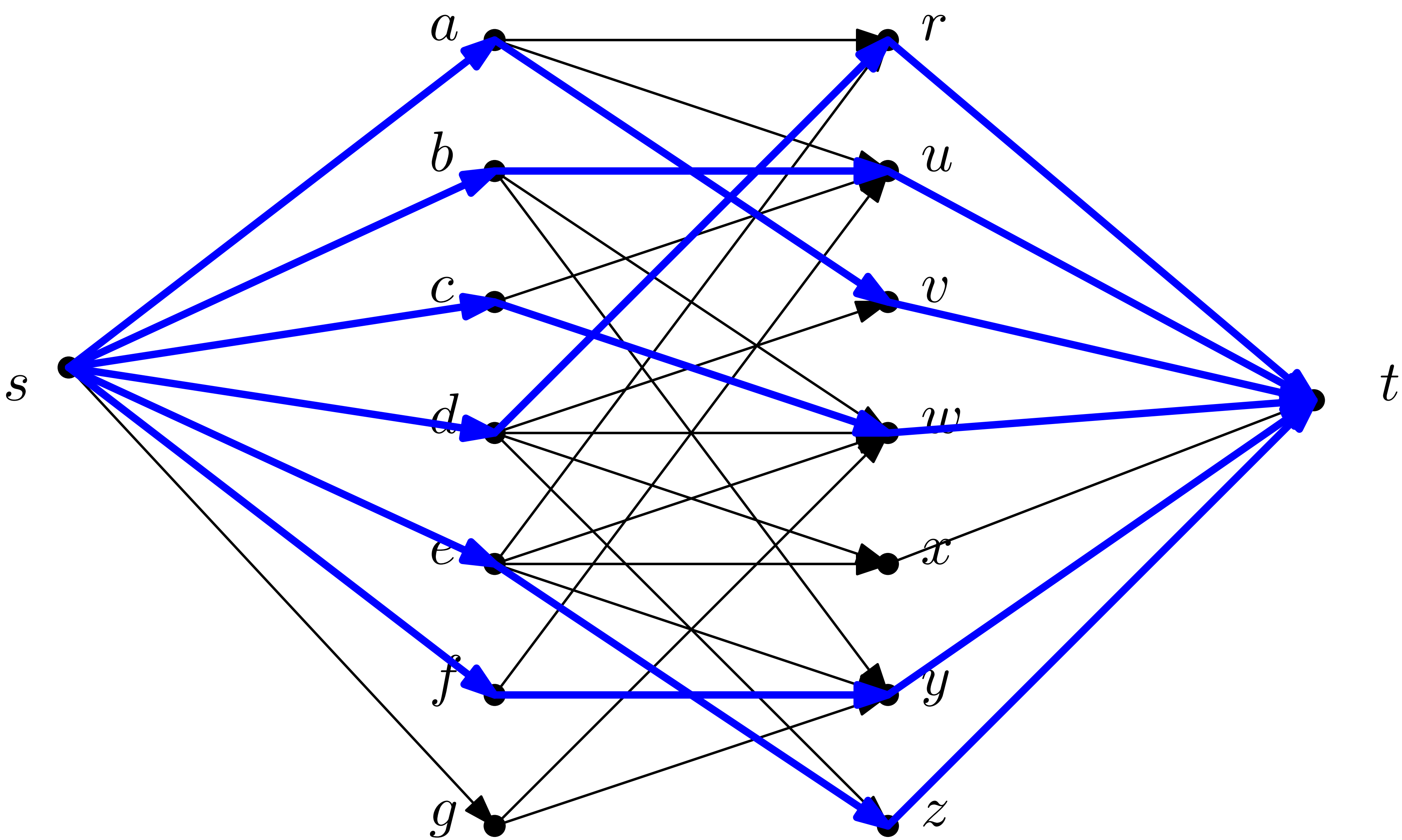


a
b
c
d
e
f
g
r
u
v
w
x
y
z
s
t

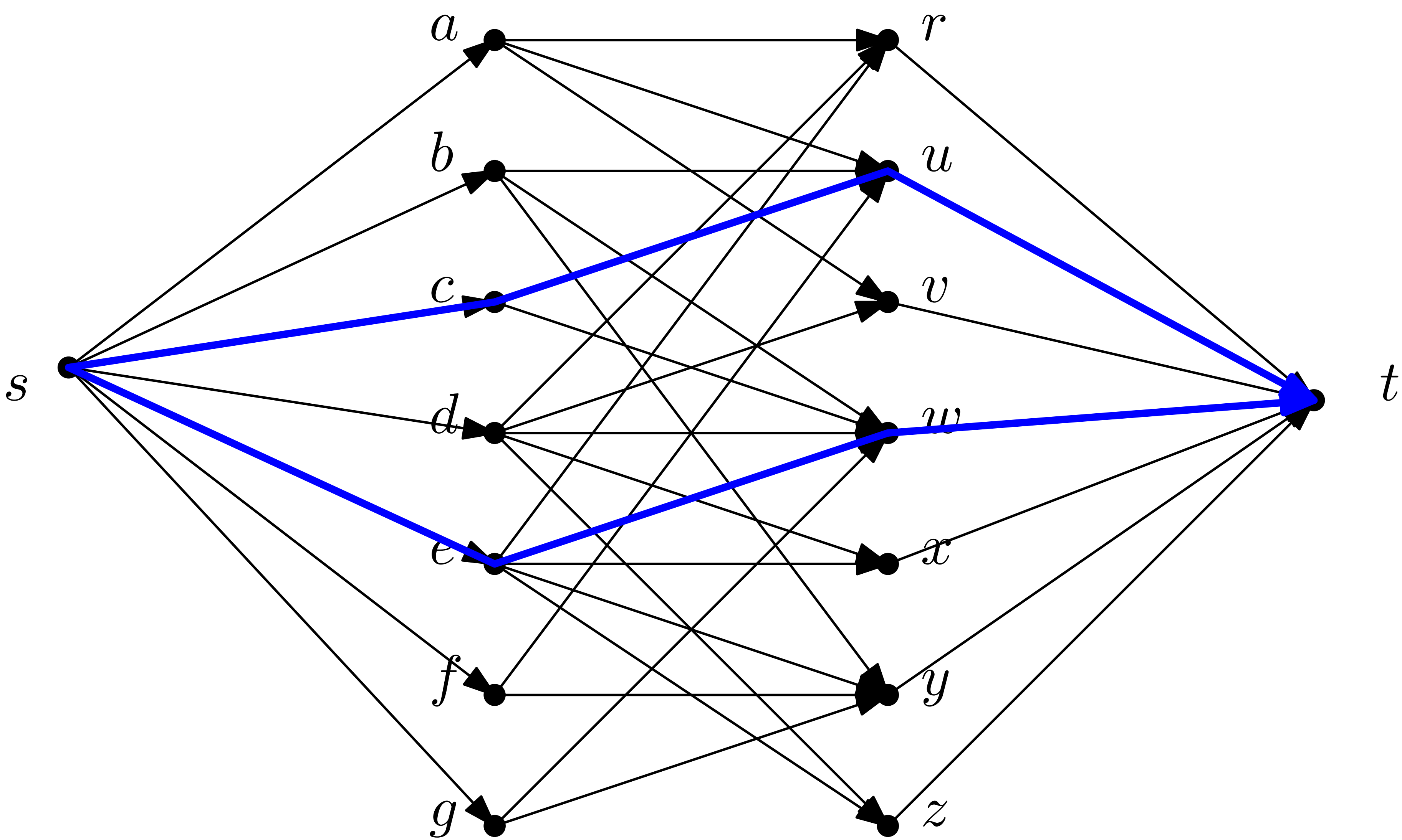
jedes Matching M



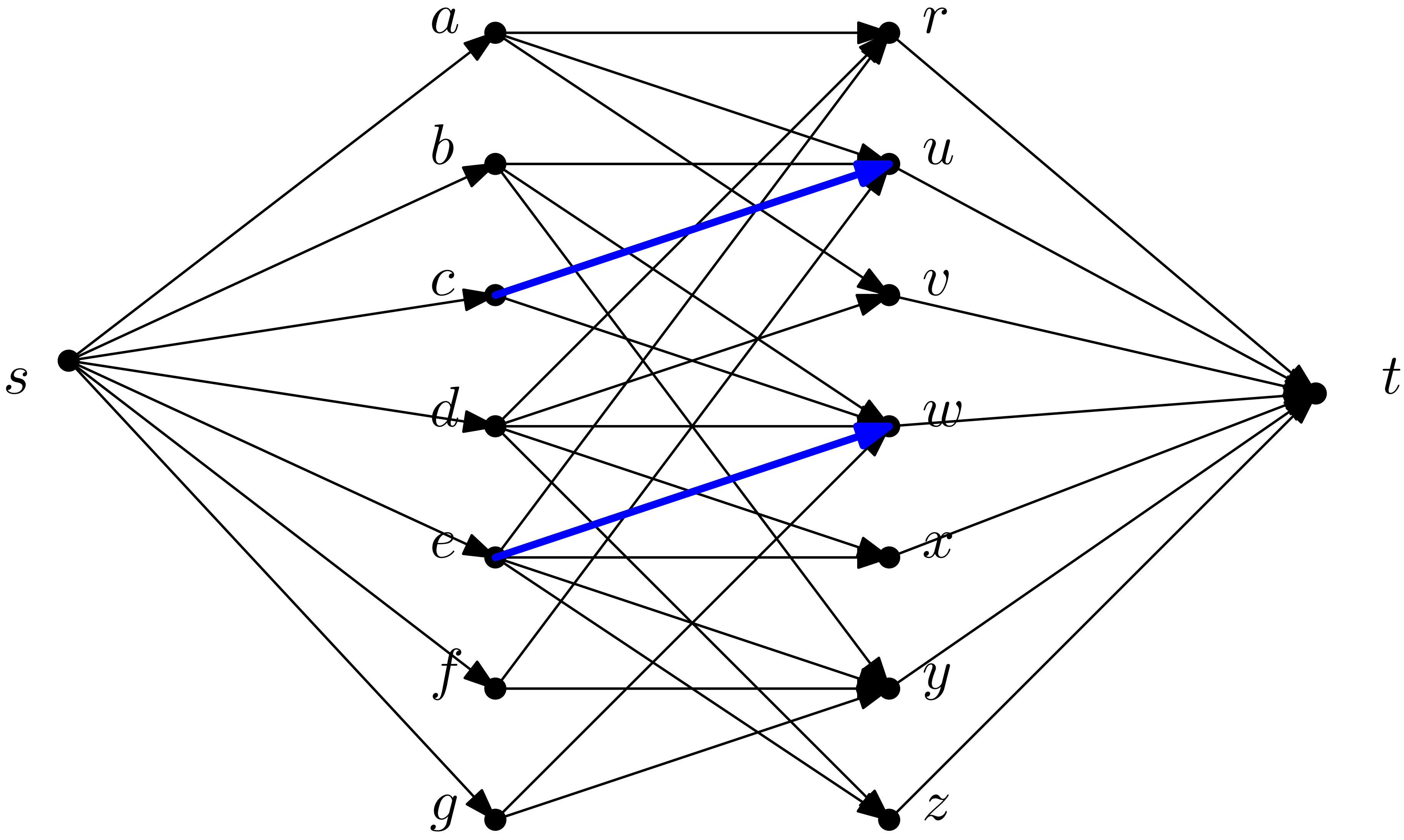
jedes Matching M gibt uns einen Fluss vom Wert $|M|$



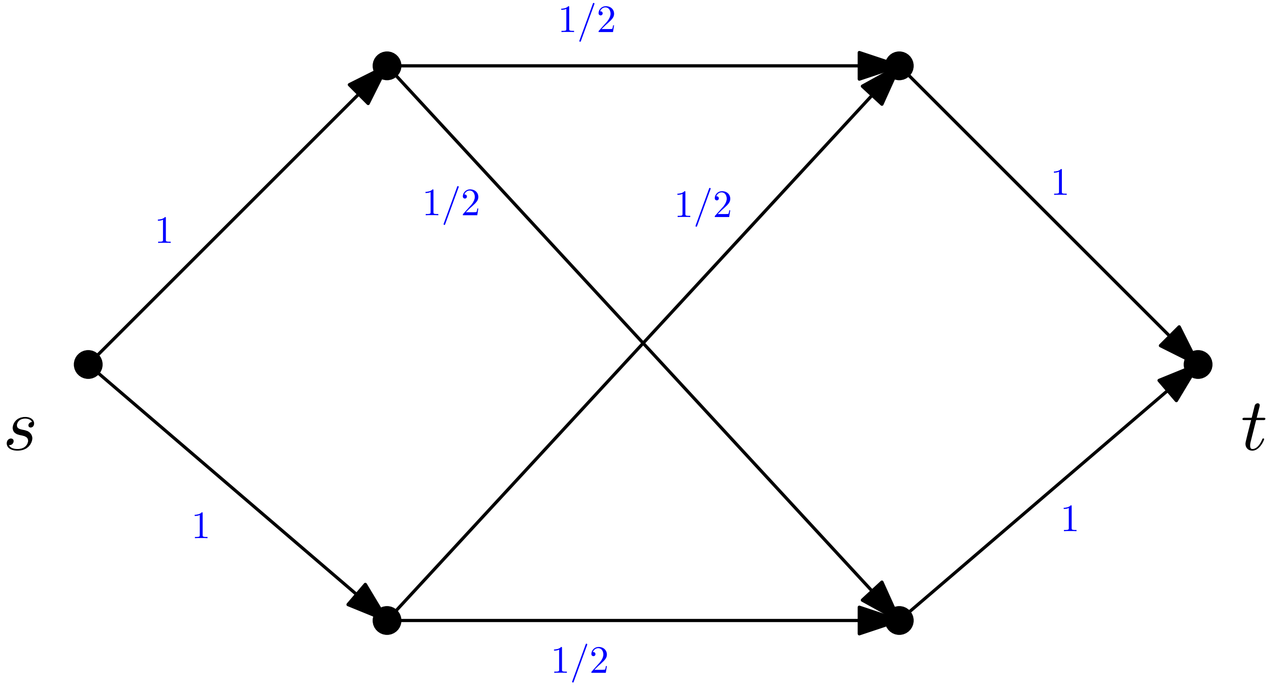
Jeder Fluss gibt uns ein Matching...



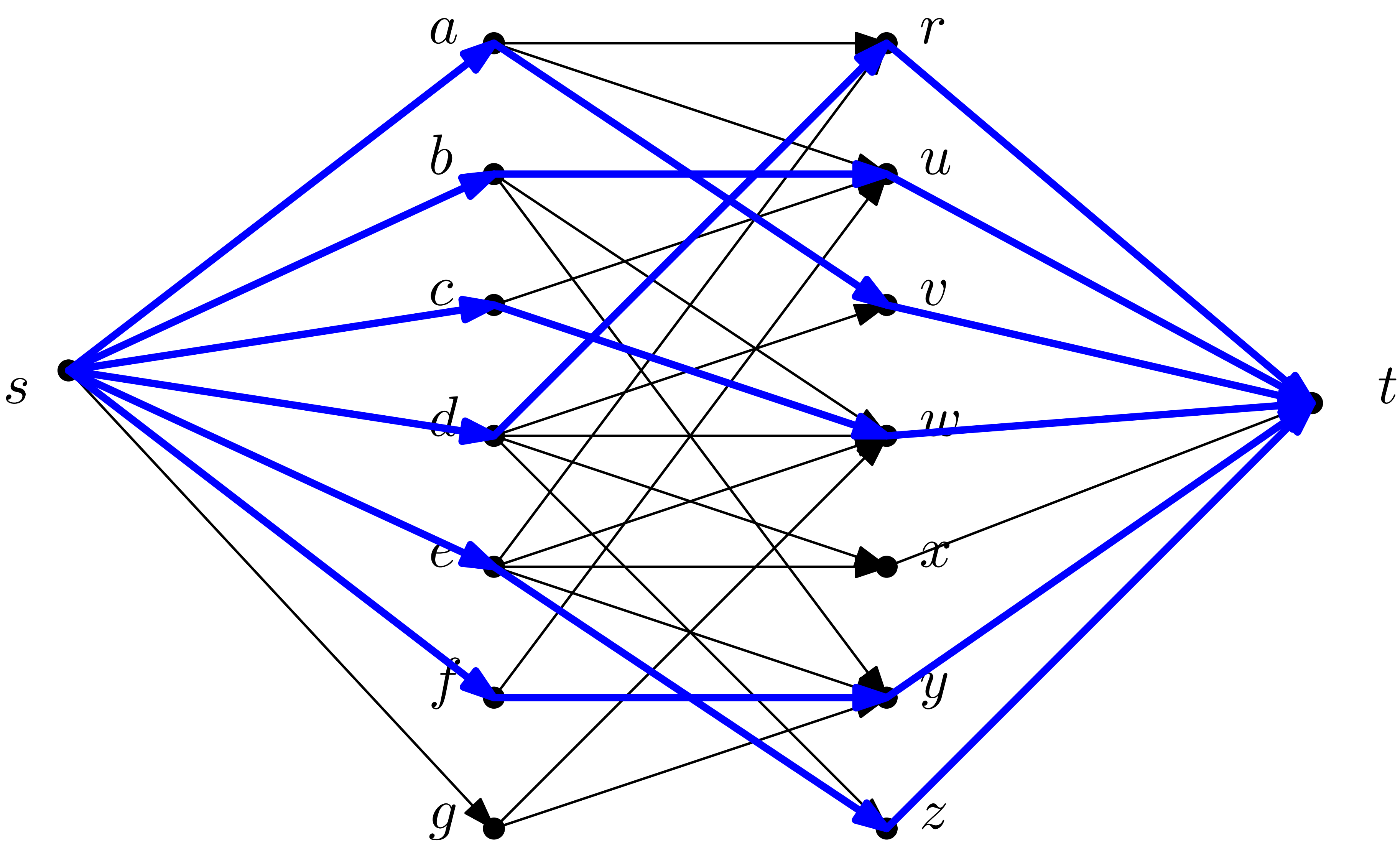
Jeder Fluss gibt uns ein Matching...



Nicht jeder Fluss gibt uns ein Matching...

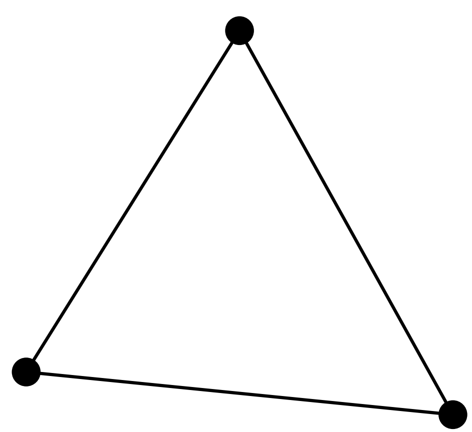


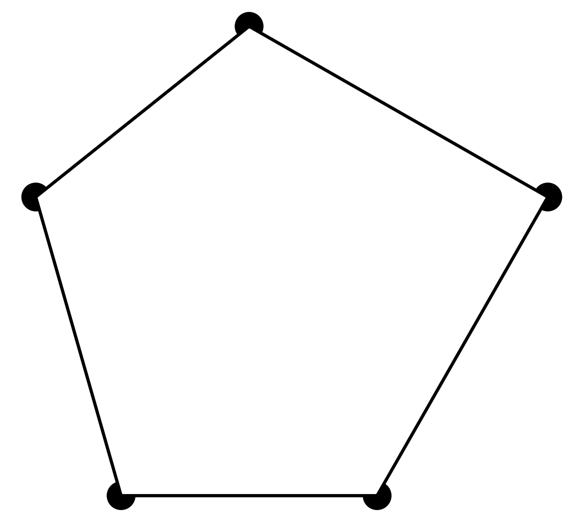
Beobachtung: ein Fluss, der in jeder Kante entweder Fluss 0 oder Fluss 1 hat (oder -1, jaja), gibt uns ein Matching .



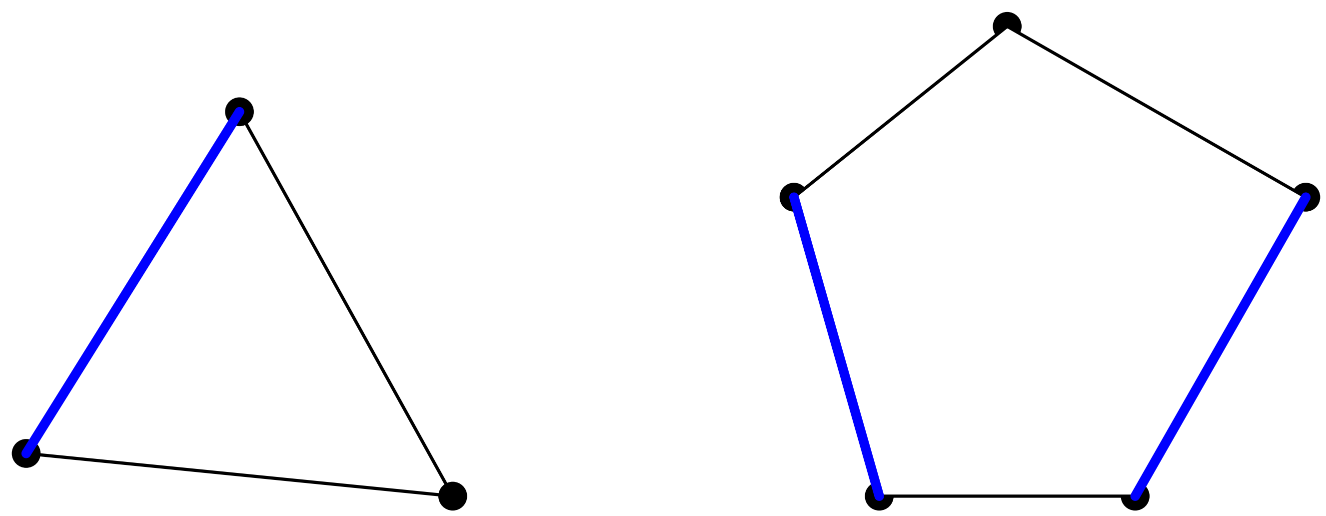
Frage: Sei G ein Netzwerk mit Unit-Kapazitäten. Gibt es unter allen Max-Flüssen sicher immer auch einen, der nur die Werte $-1, 0, 1$ verwendet?

Frage: Sei G ein Netzwerk mit Unit-Kapazitäten. Gibt es unter allen Max-Flüssen sicher immer auch einen, der nur die Werte $-1, 0, 1$ verwendet?

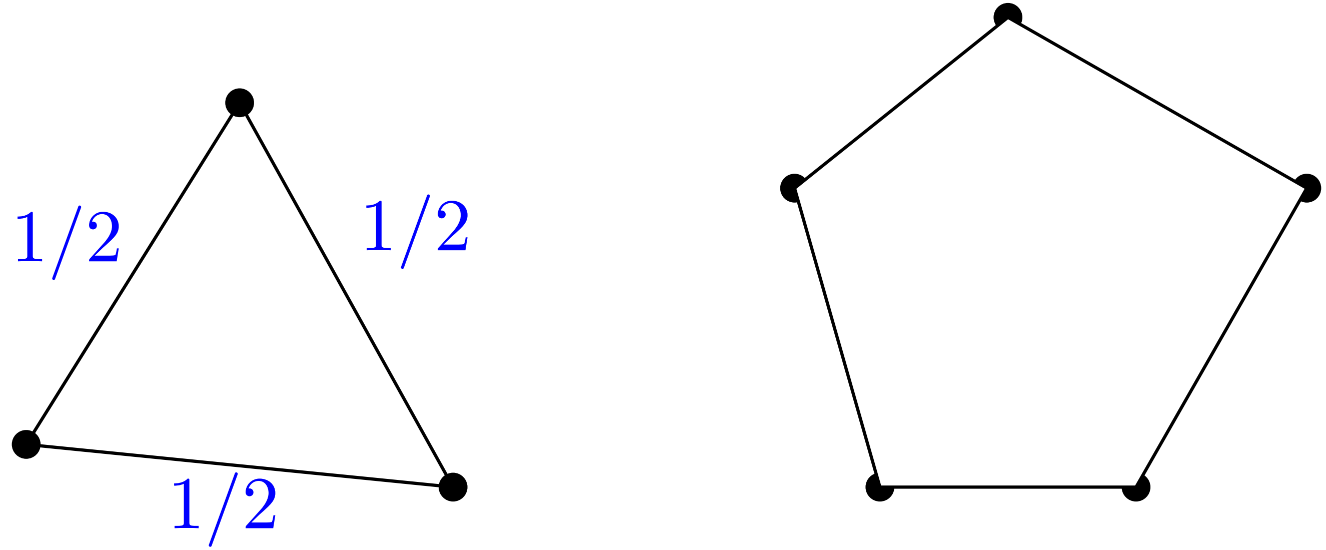




Frage: Sei G ein Netzwerk mit Unit-Kapazitäten. Gibt es unter allen Max-Flüssen sicher immer auch einen, der nur die Werte $-1, 0, 1$ verwendet?



Frage: Sei G ein Netzwerk mit Unit-Kapazitäten. Gibt es unter allen Max-Flüssen sicher immer auch einen, der nur die Werte $-1, 0, 1$ verwendet?



Frage: Sei G ein Netzwerk mit Unit-Kapazitäten. Gibt es unter allen Max-Flüssen sicher immer auch einen, der nur die Werte $-1, 0, 1$ verwendet?

Theorem (Flow Integrality Theorem). Sei $G = (V, c, s, t)$ ein Flussnetzwerk. Wenn alle Kapazitäten $c(u, v) \in \mathbf{Z}$ sind, dann gibt es unter allen Maxflüssen auch einen Maxfluss f^* mit $f(u, v) \in \mathbf{Z}$ für alle Kanten (u, v).