

Zusammenfassung

Behandelt werden zufällige lineare Gleichungssysteme modulo 3, wobei in jeder Gleichung genau k Variablen vorkommen. Es wird gezeigt, dass der Schwellwert der Lösbarkeit solcher Gleichungssysteme bei der 2-Kern-Dichte von 1 liegt. Das Resultat ist eine Verallgemeinerung bereits bekannter Resultate für den modulo 2-Fall. Dabei entsteht der 2-Kern dadurch, dass wir alle Variablen mit nur einem Vorkommen löschen. Die Dichte ist definiert als der Quotient der Anzahl der Gleichungen durch die Anzahl der Variablen.

Im Rückblick ist dieses Resultat ein natürlicher Schwellwert und die Vermutung liegt nahe, dass er bei analogen Situationen über anderen Strukturen als $\mathbb{Z}_3$ auch gelten sollte. Allerdings sind schon im modulo 2 Fall die analytischen Probleme nicht gering, und der hier behandelte Fall braucht weitere analytische Einsichten.

Ein wesentlicher Punkt unseres Beweises ist die Verwendung eines komplexen Polynoms (hier ist r die primitive dritte Einheitswurzel)

$$p(y_0, y_1, y_2) = \frac{1}{3} \left((y_0 + y_1 + y_2)^k + (y_0 + ry_1 + r^2y_2)^k + (y_0 + r^2y_1 + ry_2)^k \right).$$

Im modulo 2 Fall wurde an analoger Stelle das Polynom $\frac{1}{2}((y_0 + y_1)^k - (y_0 - y_1)^k)$ gebraucht. Da $p(y_0, y_1, y_2)$ komplexe Koeffizienten enthält, ist es nicht von vornherein klar, ob eine Behandlung analog zum modulo 2 Fall möglich ist. Auch macht die höhere Parameteranzahl die Sache komplizierter. Im Vergleich zum modulo 2 Fall, wo lokale Grenzwertsätze über gitterförmige Zufallsvariablen angewendet wurden, brauchen wir hier die Verallgemeinerung auf zweidimensionale gitterförmige Zufallsvektoren.