Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Informatik

Professur Theoretische Informatik
und Informationssicherheit

Proseminar Effiziente Algorithmen

Thema: Vehicle Routing

Leitung: Prof. Dr. Lefmann

Durchführung:

Michael Neubert
(Mat.-Nr.: 33240)
mail@michael-neubert.de

Sommersemester 2002 Chemnitz, den 15.11.2002

Gliederung

1. Einführung

„Routingprobleme“ (Tourenplanungsprobleme) gehören neben dem „Traveling Salesman Problem“ (TSP) zu den klassischen OR-Problemen (Operational Research), deren Lösung Gegenstand intensiver weltweiter Forschung seit mehreren Jahrzehnten ist. Sie sind aus kombinatorischer Sicht „schwere“ Probleme. Das heißt, dass wir nicht hoffen können, einen Algorithmus zu finden, der solche Probleme in jedem Fall in annehmbarer Zeit löst. Dies hat zur Entwicklung einer Vielzahl von Heuristiken geführt, also von Algorithmen, die auf den jeweiligen Anwendungsfall abgestimmt sind und hier eine vernünftige (wenn auch mathematisch zumindest nicht beweisbar optimale) Lösung liefern. Dennoch ist die Optimierung von „Vehicle Routing Problemen“ (VRP) immer eine faszinierende Forschungsaufgabe geblieben. Um die Schwierigkeiten zu verstehen, die das VRP beinhaltet, sollte man sich vor Augen führen, dass heute Instanzen des TSP mit mehreren tausend Knoten gelöst werden können, während beim VRP schon Instanzen mit über 70 Knoten eine große Herausforderung darstellen.

Das „Vehicle Routing Problem“ ist in der Literatur auch unter den Namen „Vehicle Scheduling“ (Fahrtenplanung), „Truck Dispatching“ (Lastwagenabfertigung) oder einfach „Delivery Problem“ (Zustellungsproblem) bekannt. Die Grundgedanken sind dabei stets dieselben: Fahrzeuge in einem zentralen Depot sollen in einem gegebenen Zeitfenster einen geographisch voneinander getrennten Kundenstamm anfahren, wobei etwaige Kundenwünsche berücksichtigt werden. Diese Problematik spielt nicht nur bei der Warenauslieferung eine große Rolle. Arzttouren, Wartungsfahrten, zu entleerende Briefkästen, sie alle sind dem VRP zuzuordnen. Ob Anlieferung oder Abholung - die Kundenwünsche nehmen die vielfältigsten Variationen an. Um die Komplexität des VRP nicht noch weiter zu erhöhen, konzentriert man sich bei den Forschungen auf die wesentlichen Gemeinsamkeiten aller „Vehicle Routing Probleme“: das „basic VRP“ (klassische VRP).

1.1. Das klassische VRP

Nachfolgende Bezeichnungen werden für das „klassische VRP“ vereinbart:

Kunden	$i = 2, \dots, n$	$i = 1$ entspricht Lager/Depot
Fahrzeuge	$k = 1, \dots, m$	
Kundenanfragen	q_i	
Fahrtkosten	c_{ij} zwischen Kunden i und j	
Kapazität von Fahrzeug k	Q_k.	

Das „klassische VRP“ besteht nun darin, ausgehend von einem Depot, an dem eine Anzahl m von Fahrzeugen mit vorgegebener Kapazität Q_k zur Verfügung steht, eine oder mehrere Routen zu planen, um alle n vorgegebenen Kunden genau einmal zu bedienen. Dabei ist jedem Kunden i ein Bedarf q_i zugeordnet. Die Summe der Bedarfe der Kunden einer Route des Fahrzeugs k darf die Kapazität Q_k nicht übersteigen. Start- und Endpunkt sind stets das Lager. Das Optimierungsziel besteht i.d.R. darin, die insgesamt zurückgelegte Strecke und somit die Kosten zu minimieren.

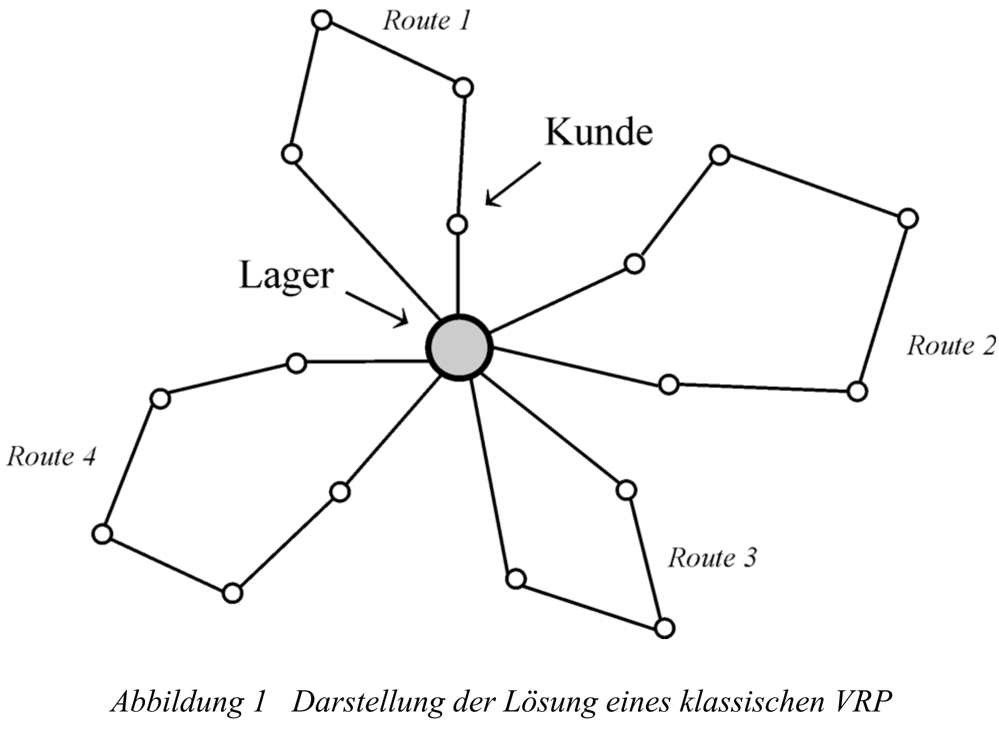

Abbildung 1 Darstellung der Lösung eines klassischen VRP

Das VRP kann demzufolge als eine Verallgemeinerung des TSP aufgefasst werden. Das TSP erhält man, wenn zur Lösung des klassischen VRP nur eine Route erforderlich ist.

1.2. Praktische Aspekte des VRP

Das klassische VRP ignoriert eine Menge von Beschränkungen und Erweiterungen, die sehr oft in der Realität anzutreffen sind. Die wichtigsten seien hier kurz angeführt:

(i) Die Touren werden auf eine bestimmte Dauer beschränkt (z. B. auf Grund von Arbeitszeitregelungen). Zur Lösung des Problems werden zusätzlich die Fahrtzeiten zwischen den Kunden benötigt (t_{ij}).

(ii) Jeder Kunde muss innerhalb eines gegebenen Zeitfensters $[e_i, l_i]$ angefahren werden. Die Bedienung des Kunden kann frühestens zum Zeitpunkt e_i (earliest) und muss spätestens zum Zeitpunkt l_i (latest) beginnen. Außerdem wird in der Regel eine Servicezeit (s_i) für die Dauer der Bedienung angegeben.

(iii) Die Fahrzeuge können mehr als eine Route abfahren. Diese Erweiterung macht insbesondere Sinn, wenn zeitliche Vorgaben einzuhalten sind (Tourdauer, Zeitfenster, etc.) und eine Minimierung in der Zahl der eingesetzten Fahrzeuge angestrebt wird.

(iv) Durch die Vorgabe von Präzedenzrelationen gibt es eine Vielzahl neuer möglicher Modelle:
   a) Bestimmte Kunden müssen vor anderen bedient werden, sofern sie auf einer gemeinsamen Tour liegen (u.a. auf Grund der Beladung des Fahrzeuges).
   b) Touren können Liefer- und Sammelaufträge beinhalten. Das „Pickup and Delivery Problem“ umfaßt den Transport eines Gutes von einem Kunden (Pickup) zu einem anderen (Delivery). Dementsprechend müssen die beiden Kunden in einer gemeinsamen Tour bedient werden, wobei das Pickup vor dem Delivery stattfinden muss. Andererseits werden beim sogenannten „Backhauling“ (Zurückbefördern) zunächst alle Waren an die Kunden ausgeliefert, bevor auf dem Rückweg zum Depot neue Güter eingesammelt werden. Ein weiterer bekannter und besonders untersuchter Spezialfall ist das sogenannte „Dial-a-Ride-Problem“ (Sammeltaxi-Problem).

(v) Das klassische VRP kann durch Depot- und Fuhrparkerweiterungen ergänzt werden. Dazu gehören u. a. Lade- und Entladezeiten im Depot sowie die Anzahl der dort vorhandenen Ladebuchten. Zudem können unterschiedliche Fahrzeugtypen (Geschwindigkeit, Kapazität) mit in die Betrachtung einbezogen werden.

(vi) Es gibt mehrere Depots von denen ausgehend Touren geplant werden. Handelt es sich um autonome Lager, muss lediglich das VRP für jedes einzelne Depot gelöst werden. Kompliziert wird es , wenn die Depots voneinander abhängig werden. Die Art der Interaktion muss dann mit in die Betrachtung einfließen (Anzahl der Fahrzeuge in den Depots, Start- und Endpunkt in verschiedenen Lagern, usw.).

(vii) Durch die Art des Kundenservices gilt es weitere Bedingungen zu erfüllen. Dabei spielen vor allem die Lieferzeiten eine wichtige Rolle.
   a) typische Periode ***(siehe Beispiel Anhang 1)***
      Kundenanfragen finden periodisch konstant statt, d. h. alle t Tage wird eine Bestellung erwartet. Während T Tagen wünscht der Kunde ca. $T \div t$ mal (echt gerundet) besucht zu werden. Die Lieferungen sollen dabei $t \pm \varepsilon$ Tage voneinander getrennt sein.
   b) Stichtag
      Erhaltene Aufträge der letzten T Tage werden in den nächsten T Tagen ausgeliefert. Da es keine weiteren Einflüsse gibt, ist das VRP für die T-Tage Periode voll definiert. Diese Art der Herangehensweise kann jedoch schnell zum Auftragsstau führen.
   c) veränderliche Kundenpriorität
      Der Kunde muss nach Eingang der Bestellung spätestens nach t Tagen besucht werden. Je näher dieses Datum rückt, desto größer wird seine Priorität, bis er schließlich abgearbeitet wird.

(viii) Das Fahrzeug ist mit verschiedenen Waren beladen. Problematisch ist dabei vor allem die Anordnung der Güter auf der Ladefläche, wenn Kunden voneinander verschiedene Warentypen anfordern.

(ix) In bestimmten Fällen ist das VRP nicht in der Lieferzeit lösbar. In diesen Situationen gilt es zu minimieren:
   a) Anzahl zusätzlicher Fahrzeuge
   b) Anzahl nicht zufriedengestellter Kunden innerhalb der Periode
   c) Wegstrecke und Zeitaufwand.

Durch das Verknüpfung einiger dieser und anderer zusätzlicher Restriktionen erhält man sofort eine Vielzahl von Modellen, die sich äußerlich jeweils „nur ein wenig“ voneinander unterscheiden. Trotz der formalen Ähnlichkeit dieser Probleme weisen sie oft wesentliche strukturelle Unterschiede auf. Daher können viele der in den letzten Jahrzehnten entwickelten speziellen Algorithmen nicht von einem Problem auf ein anderes übertragen werden.

2. Formulierung des klassischen VRP nach Christofides, Mingozzi und Toth 1980

In den letzten Jahrzehnten wurden vielfältige Formulierungsansätze zur Lösung des klassischen VRP entwickelt. Ein Ansatz aus dem Jahr 1980 von Christofides, Mingozzi und Toth soll hier genauer betrachtet werden.

Nachfolgende Bezeichnungen werden für die Formulierung vereinbart:

Kunden	$i = 2, \dots, n$	$i = 1$ entspricht Lager/Depot
Fahrzeuge	$k = 1, \dots, m$	
Kundenanfragen	q_i	
Fahrtkosten	c_{ij} zwischen Kunden i und j	
Kapazität Fahrzeug k	Q_k	
alle möglichen Einzelrouten für Fahrzeug 1 (TSP Lösung)	$r = 1, \dots, \hat{r}$	
Menge der Kunden in Route r	M_r	
Kosten der Route r	d_r	
Mengenvereinbarung	$N_i = \{r \mid i \in M_r\}$	
Gewicht des Fahrzeugs auf Route r	K_r	$K_r = \sum_{i \in M_r} q_i$

Alle Routen r sind in absteigender Reihenfolge ihrer Güterladung K_r sortiert. Dabei entspricht r_k dem kleinsten Wert von r, so dass für Fahrzeug k gilt $K_r \leq Q_k$. Des Weiteren wird $r_{m+1} = \hat{r} + 1$ vereinbart.

$$y_r = \begin{cases} 1 & \text{falls Route r Bestandteil der Lösung des VRP ist} \\ 0 & \text{falls r als Lösungsbestandteil entfällt} \end{cases}$$

Die Lösung des klassischen VRP besteht in der Minimierung des Ausdrucks:

$$\sum_{r=1}^{\hat{r}} d_r \bullet y_r$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_{r \in N_i} y_r = 1 \qquad i = 2, \ldots , n$$

Diese Vereinbarung stellt sicher, dass jeder Kunde genau einmal angefahren wird.

$$\sum_{r=1}^{r_{k+1}-1} y_r \le k \qquad r_k \neq r_{k+1} ; k = 1, \ldots , m$$

$$\sum_{r=1}^{\hat{r}} y_r = m$$

Die gewählten m Routen der Lösung des VRP sind mit den gegeben m Fahrzeugen durchführbar.

Bei dem dargestellten Formulierungsansatz handelt es sich um ein Mengenproblem mit zusätzlichen Bedingungen. Zur Lösung derartiger Fälle können ohne weiteres optimierte Algorithmen für Mengenoperationen mit einbezogen werden.

Ein Anwendungsbeispiel zur Formulierung des klassischen VRP nach Christofides, Mingozzi und Toth aus dem Jahr 1980 befindet sich im ***Anhang 2***.

3. Heuristiken für das klassische VRP

In den letzten Dekaden wurde sehr viel Arbeit in die Entwicklung effizienter Heuristiken zur Lösung des VRP investiert. Bei diesen Verfahren kann das Auffinden einer hinreichenden/optimalen Lösung zwar nicht garantiert werden, der dafür verwendete Zeitaufwand wird aber im Durchschnitt verringert.

Derzeit bekannte Heuristiken für das VRP unterscheiden sich sehr stark in ihrer Herangehensweise. Sie könne daher in drei Kategorien unterteilt werden:

a) konstruktive Methoden
b) zwei Phasen Methoden
c) unvollständige Optimierungsmethoden.

Heuristiken der Kategorie b) basieren auf der Zerlegung des VRP in zwei Teilprobleme. In der ersten Phase versucht man, bestimmten Kundengruppen ein Fahrzeug zuzuweisen. Für die entstandenen Blöcke wird dann jeweils das TSP gelöst.

Unvollständige Optimierungsmethoden nutzen bereits vorhandene Algorithmen und Heuristiken zur Lösung des VRP. Hauptanliegen bei diesen Verfahren ist es, ein optimiertes Laufzeitverhalten zu erreichen. Dieses Ziel lässt sich u. a. damit verwirklichen, dass Lösungsalgorithmen vorzeitig abgebrochen werden, wenn der Grad der erreichten Optimierung den Anforderungen entspricht.

Konstruktive Methoden versuchen durch geschickte Ansätze den Aufbau der Einzelrouten zu beschleunigen. Der Streckenzuwachs erfolgt dabei wahlweise mit sequentiellen oder parallelen Verfahren. Eine der ersten Heuristiken dieser Art ist der „Saving Algorithm“ (Sparalgorithmus) von Clarke und Wright aus dem Jahre 1964, welcher im anknüpfenden Abschnitt Anlass einer genaueren Betrachtung sein soll.

3.1. Der Saving Algorithmus

Die wohl bekannteste Heuristik zur Lösung des klassischen VRP stammt von Clarke und Wright aus dem Jahre 1964. Der „Saving Algorithm“ (Sparalgorithmus) gehört zu den konstruktiven Methoden und nutzt zur Erstellung der einzelnen Routen die allgemeine Dreiecksungleichung.

Algorithmus mit sequentiellem Ablauf:

Schritt 1 Berechne für alle Kundenpaare i und j die möglicherweise vorhandenen Einsparmöglichkeiten, wenn diese gemeinsam statt einzeln angefahren werden (Dreiecksungl.): $s_{ij} = c_{1i} - c_{ij} + c_{j1}$.

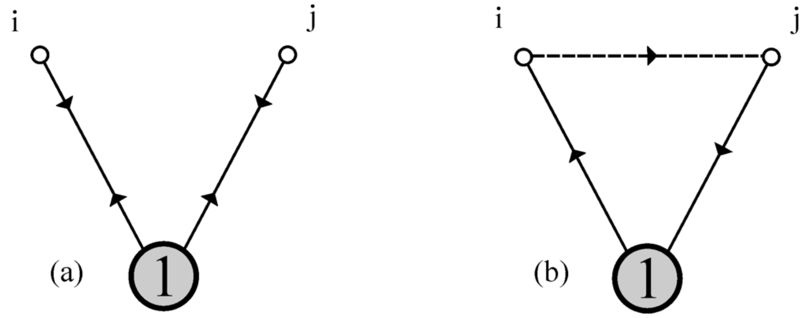

Abbildung 2 Darstellung der Einsparmöglichkeiten
(a) Kunden werden einzeln angefahren (b) Kunden werden zusammengefasst

Schritt 2 Ordne die Ergebnisse in absteigender Reihenfolge.

Schritt 3 Beginne die Route am Anfang der Liste.

Schritt 4 Finde absteigend den ersten Eintrag in der Liste, um die aktuelle Route an einer ihrer Enden zu erweitern.

Schritt 5 Kann die Route nicht weiter ergänzt werden, beginne eine neue Strecke mit dem erstmöglichen Eintrag der Liste.

Schritt 6 Wiederhole Schritte 4 und 5 bis keine Einträge mehr kombiniert werden können.

Am Ende besteht bei dem vorliegenden Verfahren stets die Möglichkeit, dass einige Kunden einzeln angefahren werden müssen, da sie nicht mehr in die bestehenden Routen integriert werden können.

Ein Anwendungsbeispiel zum „Saving Algorithmus“ findet sich im ***Anhang 3***.

4. Quellennachweis

Lawler, E.L.; Lenstra, J.K.; Kan, A.H.G. Rinnooy; Shmoys, D.B.: The Travelling Salesman Problem. John Wiley & Sons Ltd. 1985

http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/

http://www.or.rwth-aachen.de/kontakt/mitarbeiter/birger/birger.html

Anhang 1

Anwendungsbeispiel: VRP ergänzt durch Zeitkriterium
Lieferzeiten bei periodischen Kundenanfragen

Ausgangssituation: Kundenanfragen finden periodisch konstant statt, d. h. alle t Tage wird eine Bestellung erwartet. Während T Tagen wünscht der Kunde ca. $T \div t$ mal (echt gerundet) besucht zu werden. Die Lieferungen sollen dabei $t \pm \varepsilon$ Tage voneinander getrennt sein.

gegeben: T = 20 Tage

	Kunde 1	Kunde 2	Kunde 3	Kunde 4
t in Tagen	10	5	4	2

gesucht: Lieferzeiten in vorgegebenem Zeitraum

Lösung: In diesem Beispiel wird davon ausgegangen, dass das VRP bereits für die angegebene Strecke gelöst wurde. Das Zeitkriterium wird nun nachträglich integriert.

	Kunde 1	Kunde 2	Kunde 3	Kunde 4
$T \div t$	2	4	5	10

Die Route muss folglich genau 10 mal abgefahren werden. Damit sich die Bestellungen nicht zu grob überschneiden, sollte ε relativ klein gewählt werden.

Für $\varepsilon = 1$ erfolgen die Transporte alle 1 bis 3 Tage ($t \pm \varepsilon$).
Beispiel eines Lieferplanes:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Lieferung	x		x			x	x		x		x		x	x			x		x	

Die Lösung des VRP unter Berücksichtigung des Zeitkriteriums kann nun in einem entsprechenden Lieferplan veröffentlicht werden. Demzufolge weiß jeder Kunde, wann mit der Zustellung seines Auftrages zu rechnen ist.

Anhang 2

Anwendungsbeispiel: klassisches VRP nach Christofides, Mingozzi und Toth aus dem Jahre 1980

gegeben: $n = 6$, $(q_2, \ldots, q_6) = (2,1,1,3,1)$
$m = 2$, $Q_1 = Q_2 = 5$

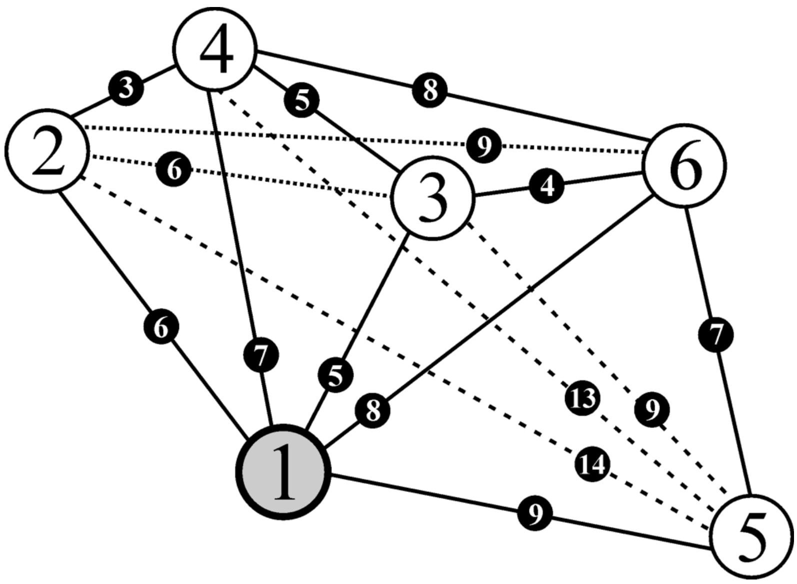

Abbildung 3 Darstellung der Entfernungen/Kosten zwischen den Kunden

zugehörige Distanzmatrix für das VRP

Kunde	1	2	3	4	5	6
1	-					
2	6	-				
3	5	6	-			
4	7	3	5	-		
5	9	14	9	13	-	
6	8	9	4	8	7	-

gesucht: Formulierung und Lösung des klassischen VRP nach Christofides, Mingozzi und Toth aus dem Jahre 1980

Lösung:

Die Reihenfolge der Kunden aus der Menge M_r auf den Einzelrouten entspricht der TSP Lösung. Durchgestrichen dargestellte Wegstrecken entfallen, da $K_r > Q_k$ ist.

r	Kunden	M_r (TSP)	d_r	K_r
1	2	2	12	2
2	3	3	10	1
3	4	4	14	1
4	5	5	18	3
5	6	6	16	1
6	2, 3	2, 3	17	3
7	2, 4	2, 4	16	3
8	2, 5	2, 5	29	5
9	2, 6	2, 6	23	3
10	3, 4	3, 4	17	2
11	3, 5	3, 5	23	4
12	3, 6	3, 6	17	2
13	4, 5	4, 5	29	4
14	4, 6	4, 6	23	2
15	5, 6	5, 6	24	4
16	2, 3, 4	2, 4, 3	19	4
	~~2, 3, 5~~	~~2, 3, 5~~		~~6~~
17	2, 3, 6	2, 3, 6	24	4
	~~2, 4, 5~~	~~2, 4, 5~~		~~6~~
18	2, 4, 6	2, 4, 6	25	4
	~~2, 5, 6~~	~~2, 5, 6~~		~~6~~
19	3, 4, 5	4, 3, 5	30	5
20	3, 4, 6	4, 3, 6	24	3
21	3, 5, 6	3, 6, 5	25	5
22	4, 5, 6	4, 6, 5	31	5
	~~2, 3, 4, 5~~	~~2, 3, 4, 5~~		~~7~~
23	2, 3, 4, 6	2, 4, 3, 6	26	5
	~~2, 3, 5, 6~~	~~2, 3, 5, 6~~		~~7~~
	~~2, 4, 5, 6~~	~~2, 4, 5, 6~~		~~7~~
	~~3, 4, 5, 6~~	~~3, 4, 5, 6~~		~~6~~
	~~2,3,4,5,6~~	~~2,3,4,5,6~~		~~8~~

Alle Routen r werden in absteigender Reihenfolge ihrer Güterladung K_r sortiert.

r	Kunden	M_r (TSP)	d_r	K_r
1	2, 3, 4, 6	2, 4, 3, 6	26	5
2	4, 5, 6	4, 6, 5	31	5
3	3, 5, 6	3, 6, 5	25	5
4	3, 4, 5	4, 3, 5	30	5
5	2, 5	2, 5	29	5
6	2, 4, 6	2, 4, 6	25	4
7	2, 3, 6	2, 3, 6	24	4
8	2, 3, 4	2, 4, 3	19	4
9	5, 6	5, 6	24	4
10	4, 5	4, 5	29	4
11	3, 5	3, 5	23	4
12	3, 4, 6	4, 3, 6	24	3
13	2, 6	2, 6	23	3
14	2, 4	2, 4	16	3
15	2, 3	2, 3	17	3
16	5	5	18	3
17	4, 6	4, 6	23	2
18	3, 6	3, 6	17	2
19	3, 4	3, 4	17	2
20	2	2	12	2
21	6	6	16	1
22	4	4	14	1
23	3	3	10	1

Mit den errechneten Werten gilt es den Ausdruck $\sum_{r=1}^{\hat{r}} d_r \cdot y_r$ zu minimieren.

Dazu müssen alle Kombinationsmöglichkeiten der vorhandenen Routen unter Beachtung der Nebenbedingungen durchgerechnet werden. Das heißt:

Jeder Kunde wird genau einmal angefahren und die Lieferungen erfolgen mit den beiden vorhandenen Fahrzeugen. Demzufolge muss y_r für genau zwei Touren den Wert 1 besitzen. Auf allen anderen Strecken ist es 0.

Die Ermittlung der minimalen Kosten erweist sich dabei als sehr zeitaufwendig.

<u>Minimale Kosten (44) entstehen, wenn y_1 und y_{16} auf 1 gesetzt werden.</u>

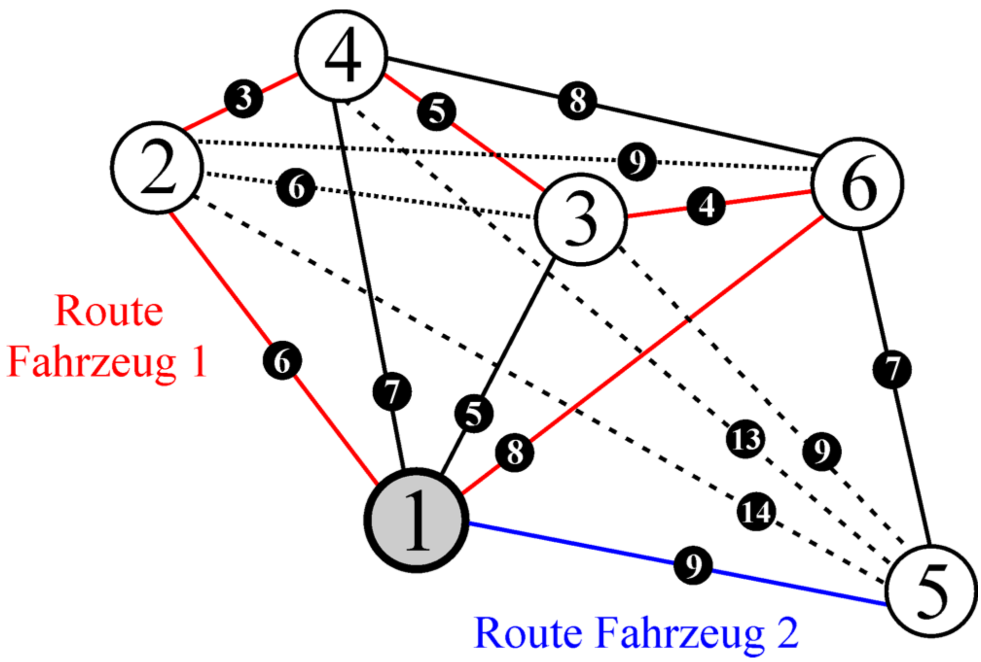

Abbildung 4 Darstellung der Lösung des VRP

<u>Zusatz:</u> Im gezeigten Beispiel kann noch eine zweite optimale Lösung gefunden werden.

Anhang 3

<u>Anwendungsbeispiel:</u> Lösen eines klassischen VRP mit Hilfe des „Saving Algorithmus“ von Clarke und Wright aus dem Jahre 1964.

<u>gegeben:</u> VRP aus Anlage 2

<u>gesucht:</u> Lösung des klassischen VRP mit der vorgegebenen Heuristik

<u>Lösung:</u>

Zunächst werden die möglicherweise vorhandenen Einsparmöglichkeiten aller Kundenpaare i und j berechnet und in absteigender Reihenfolge angeordnet (Dreiecksungleichung): $s_{ij} = c_{1i} - c_{ij} + c_{j1}$.

s_{ij}	Ersparnis
s_{23}	5
s_{24}	10
s_{25}	1
s_{26}	5
s_{34}	7
s_{35}	5
s_{36}	9
s_{45}	3
s_{46}	7
s_{56}	10

s_{ij}	Ersparnis
s_{24}	10
s_{56}	10
s_{36}	9
s_{34}	7
s_{46}	7
s_{23}	5
s_{35}	5
s_{26}	5
s_{45}	3
s_{25}	1

Der erste Eintrag ist s_{24}. Die Route beginnt folglich bei Kunde 2 und wird über Kunde 4 fortgeführt. Die nächste Kombinationsmöglichkeit heißt s_{34}. Demzufolge wird die Strecke mit Kunde 3 verknüpft. Jetzt kann die Route mit s_{36} ergänzt werden. Kunde 6 ist die letzte Station für Fahrzeug 1 ($K_1 = 5$).

Da keine weiteren Einträge mehr kombiniert werden können, muss Kunde 5 von Fahrzeug 2 einzeln angefahren werden.

<u>Fahrzeug 1: Depot → Kunde 2 → Kunde 4 → Kunde 3 → Kunde 6 → Depot</u>

<u>Fahrzeug 2: Depot → Kunde 5 → Depot</u>

Die Heuristik liefert im gezeigten Beispiel die optimale Lösung des VRP.