

# Klausur

## Theoretische Informatik I

### WS 2007/2008

#### Studiengänge Informatik und Mathematik

#### Aufgabe 1

(2+2+3 Punkte)

Wir betrachten gerichtete Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, \dots, n\}$ .

- (a) Wieviele *einfache* Wege  $1 \rightsquigarrow 2$  der Länge 3 (d. h. mit genau drei Kanten) gibt es in  $G$  maximal?
- (b) Erläutern Sie, was eine Kreuzkante ist und geben Sie ein Beispiel an.
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage.

Ist  $G$  kreisfrei, dann gilt nach *jeder* Tiefensuche: Der Knoten mit der größten Beendezeit hat Eingangsgrad 0.

#### Aufgabe 2

(2+2 Punkte)

Wir betrachten ungerichtete Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, \dots, n\}$ .

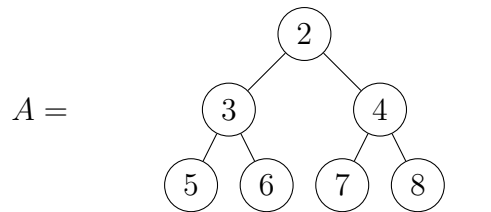
- (a) Wieviele 2-Färbungen kann  $G$  maximal haben? Betrachten Sie dazu den Graphen ohne Kanten:  $G = (V, \emptyset)$ .
- (b) Sei  $V_1 \subseteq V$  beliebig und  $V_2 = V \setminus V_1$ . Bei wievielen Graphen entspricht  $V_1, V_2$  einer gültigen 2-Färbung?

**Aufgabe 3**

(2+3+3+2+3 Punkte)

Wir betrachten einen Heap mit  $n$  Zahlen, bei dem die kleinste Zahl an der obersten Stelle steht.

- (a) Zeigen Sie, wie das Element 1 in den Beispielheap  $A = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ , also



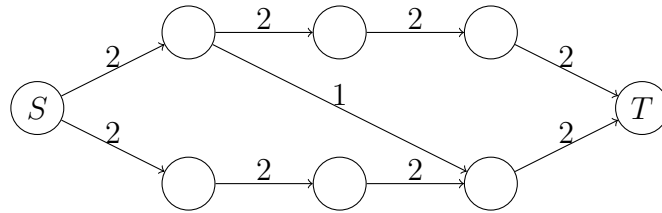
eingefügt wird.

- (b) Erläutern Sie Heapsort und seine Laufzeit.
- (c) Wir betrachten den Linearzeitalgorithmus, der ein Feld mit  $n$  (unsortierten) Zahlen in einen korrekten Heap umwandelt. Demonstrieren Sie das Verfahren schrittweise anhand des Feldes  $A = [7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$ .
- (d) Welche Laufzeit hat HeapSort, wenn Sie das Verfahren aus c) zum Heapaufbau benutzen?
- (e) Kann DeleteMin so implementiert werden, dass  $n$  Aufrufe von DeleteMin insgesamt die Zeit  $O(n)$  verbrauchen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

**Aufgabe 4**

(2+4 Punkte)

- (a) Welche Laufzeit hat der Flussalgorithmus von Edmonds/Karp?
- (b) Bestimmen Sie den maximalen Fluss von  $S$  nach  $T$  in folgendem Graphen mithilfe von Edmonds/Karp. Geben Sie nach jeder Flussvergrößerung das Restnetzwerk an.



### Aufgabe 5

(2+2+3 Punkte)

Gegeben seien die Wörter  $w_1, \dots, w_n$  in alphabetischer Reihenfolge, sowie deren Zugriffswahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_n$ . Wir wollen einen optimalen statischen binären Suchbaum für diese Wörter finden.

- Wie lange braucht man, um das Problem mit dynamischer Programmierung zu lösen?
- Der Algorithmus füllt eine Tabelle  $T$  aus. Welche inhaltliche Bedeutung hat der Eintrag  $T[i, j]$ ?
- Geben Sie die Formel an, nach der sich die Einträge  $T[i, j]$  berechnen.

### Aufgabe 6

(2+3+2 Punkte)

Gegeben sei ein gewichteter, gerichteter Graph mit den Knoten  $V = \{1, \dots, n\}$ . Wir wollen den kürzesten Weg von 1 nach  $n$  bestimmen.

- Welche Einschränkung stellt Dijkstras Algorithmus an die Kantengewichte?
- Geben Sie ein einfaches Beispiel an, das zeigt, warum diese Einschränkung nötig ist.
- In welcher Laufzeit können Sie das Problem lösen, wenn die Kantengewichte in keiner Weise eingeschränkt sind?

**Aufgabe 7**

(4+2 Punkte)

Wir betrachten den Linearzeitalgorithmus zum Selektieren. Diesen modifizieren wir, so dass er statt 5er Gruppen nun 7er Gruppen benutzt.

- (a) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung auf, die die Laufzeit des neuen Algorithmus nach oben abschätzt.
- (b) Schätzen Sie die Laufzeit des Algorithmus mithilfe von a) ab.