Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt

Chemnitz, den 16.06.2006

Wiederholungsklausur Theoretische Informatik I WS 2005/2006

Studiengang Informatik

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Wir betrachten zwei natürliche Zahlen mit n Ziffern.

(a1) Geben Sie die Laufzeit des schnellsten aus der Vorlesung bekannten Multiplikationsalgorithmus in Abhängigkeit von n an.

(a2) Geben Sie die Laufzeit der Schulmethode der Multiplikation an.

(b) Zeigen Sie $1/(1-1/n)$ ist $1+O(1/n)$.

Aufgabe 2 (minimaler Spannbaum) (3+4 Punkte)

Wir betrachten ungerichtete Graphen G mit beliebigen Kantengewichten $D[u,v]$. G habe genau eine Kante e von maximalem Gewicht. Wir betrachten das Problem des minimalen Spannbaums.

(a) Zeigen Sie: e kommt in einem minimalen Spannbaum vor $\Rightarrow$ e kommt in jedem minimalen Spannbaum vor.

(b) Skizzieren Sie einen Linearzeitalgorithmus, der testet, ob e in einem minimalen Spannbaum vorkommt. Die Eingabe für den Algorithmus ist *kein* Spannbaum, sondern der Ausgangsgraph. Begründen Sie die lineare Laufzeit.

Aufgabe 3 (2+3+3 Punkte)

Wir betrachten folgende Modifikation unseres linearen Auswahlalgorithmus `LinSelect(A,i)` der Vorlesung: Wir arbeiten mit 3er Unterteilungen statt mit 5er Unterteilungen von `A`.

(a) Geben Sie die Rekursionsgleichung für die Laufzeit an.

(b) Geben Sie die Anzahl der Blätter des Prozeduraufrufbaums an.

(c) Schätzen Sie die Laufzeit des Verfahrens ab.

Aufgabe 4 (Floyd Warshall) (3+3+2+4 Punkte)

Wir betrachten gerichtete, gewichtete Graphen gegeben durch eine Gewichtsmatrix wie üblich:

- Knotenmenge $V = \{ 1, \dots n \}$.
- Gewichtsmatrix $D[u, v]$. ($D[u,v] = \infty$ wenn keine Kante (u, v) , $D[u,v]$ eine beliebige ganze Zahl wenn Kante (u,v) und $D[u, u] = 0$.)

(a) Geben Sie den Floyd Warshall Algorithmus für den durch $D[u, v]$ gegebenen Graphen an! (Initialisierung ist nicht erforderlich.)

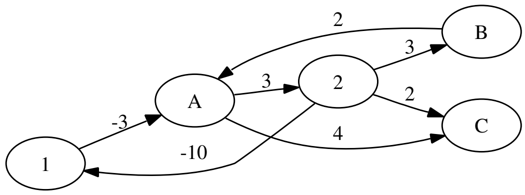
(b) Wir betrachten 2 feste Knoten, etwa $a = 10$ und $b = 11$. Wir lassen den Floyd Warshall Algorithmus laufen und halten ihn an, nachdem seine äußerste Schleife ihren zweiten Durchlauf beendet hat. Jetzt steht in $D[a, b]$ die kleinste Weglänge von bestimmten Wegen $a \rightsquigarrow b$.

Geben Sie diese Wege explizit an!

(c) Geben Sie einen (allgemeinen) gerichteten, gewichteten Graphen an und zwei Knoten u, v mit $u \neq v$, so daß gilt: Der Floyd Warshall Algorithmus hat am Ende in $D[u, v]$ nicht (!!) das gewünschte Ergebnis stehen.

(d) Wir betrachten einen modifizierten Längenbegriff: Die Länge eines Weges $u \rightsquigarrow v$ ist das größte Gewicht einer auf dem Weg vorkommenden Kante.

(d1) Ermitteln Sie die kürzesten Wege $A \rightsquigarrow B$ und $B \rightsquigarrow C$ im angegebenen Sinne in folgendem Graphen.



(d2) Modifizieren Sie den Floyd Warshall Algorithmus, so daß er die kürzesten Weglängen gemäß dem hier betrachteten Längenbegriff findet.

Aufgabe 5 (Max Sat) (3+4 Punkte)

Wir betrachten aussagenlogische Konjunktionen bestehend aus 2 Literalen, wie $a \wedge b$ oder $b \wedge \neg c$. Vollständig widersprüchliche Konjunktionen wie $a \wedge \neg a$ sind verboten. Dazu das natürliche Maximierungsproblem:

Eingabe: m Konjunktionen $C_1, \ldots, C_m$ über n aussagenlogischen Variablen.

Ausgabe: Eine Belegung π, der n Variablen, die möglichst viele der C_i erfüllt.

(a) Wieviele Konjunktionen können in jedem Fall erfüllt werden? Geben Sie eine möglichst gute Schranke an.

(b) Geben Sie das kleinste $d \leq 2$ an, so daß gilt: Das vorliegende Maximierungsproblem kann in Zeit $O(m^k \cdot d^n)$ ($k =$konstant) optimal gelöst werden. (Mit kurzer Begründung.)

Aufgabe 6 (Hamilton-Kreis) (1+2+3 Punkte)

Wir betrachten den schnellsten Algorithmus der Vorlesung, der überprüft ob ein gegebener Graph einen Hamilton-Kreis besitzt.

(a) Was ist ein Hamilton-Kreis?

(b) Welche Laufzeit hat der Algorithmus? (Mit kurzer Begründung.)

(c) Füllen Sie die Tabelle auf dem Lösungsblatt für folgenden Graphen aus.