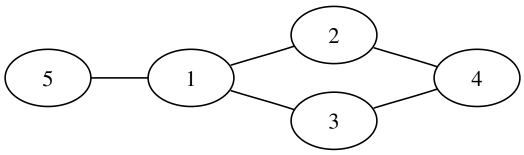
Prof. Dr. Andreas Goerdt
Professur Theoretische Informatik

15. Februar 2006

Klausur Theoretische Informatik I
Wintersemester 2005/2006
7 Aufgaben, Zeit 2 Stunden

1. Aufgabe $(2 + 3 + 3 = 8$ Punkte)

(a) Geben Sie die „Darstellung mittels zweier arrays“ des folgenden ungerichteten Graphen an.



(b) Geben Sie an, wieviele Dreiecke es in einem *un*gerichteten Graphen mit n Knoten maximal gibt.

(c) Wir betrachten *gerichtete* Graphen.

(c1) Geben Sie die Anzahl gerichteter Graphen mit Knoten 1, 2, 3 an, die die Anordnung

$$(3,\ 2,\ 1)$$

der Knoten als topologische Sortierung haben!

(c2) Geben Sie die Anzahl gerichteter Graphen mit Knoten $1, 2, 3, \ldots, n$ an, die die Anordnung

$$(v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_n)$$

als topologische Sortierung haben!

2. Aufgabe (3 + 3 = 6 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\dfrac{5}{3 - 7/n^2}$ ist $(5/3) + O(1/n)$.

(b) $2^{1+\Omega(\log n)}$ ist $n^{\Omega(1)}$.

3. Aufgabe (3 + 3 = 6 Punkte)

(a) Demonstrieren Sie das Linearzeitverfahren der Vorlesung bzw. Übung zur Erstellung eines heaps an folgendem array A von Schlüsselwerten. Der heap soll so angeordnet sein, daß der maximale Schlüsselwert an der Spitze steht. Stellen Sie die verschiedenen Zustände von A im Verlaufe des Algorithmus dar.

$$A = (1, 3, 5, 2, 7, 2, 10, 4, 11).$$

(b) Beweisen Sie, daß das Verfahren gemäß (a) wirklich in Linearzeit läuft. Hinweis: Sie sollten auf die Funktion „Sicker“ Bezug nehmen.

4. Aufgabe (2 + 2 = 4 Punkte)

(a) Konstruieren Sie ein Flussnetzwerk, so daß gilt: Es gibt zwei Knoten a und b, so daß der Algorithmus von Edmonds Karp den Fluss zwischen a und b mehrmals erhöht, und zwar so:

- Zunächst wird $f(a, b)$ erhöht
- dann $f(b, a)$
- dann wieder $f(a, b)$.

(b) Geben Sie eine (möglichst gute) obere Schranke dafür an, wie häufig Edmonds Karp $f(a, b)$ oder $f(b, a)$ erhöht. Mit kurzer Begründung (!)

5. Aufgabe (1 + 5 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie die Anzahl der skalaren Multiplikationen an, die man braucht, um eine $m \times k$ Matrix mit einer $k \times l$ Matrix mit dem direkten Algorithmus zu multiplizieren! Mit (sehr) kurzer Begründung.

(b) Seien Matrizen folgender Größe gegeben:

$$M_1 : 10 \times 20, \; M_2 : 20 \times 30$$
$$M_3 : 30 \times 5, \; M_4 : 5 \times 100$$

(b1) Geben Sie die Größe des Matrixprodukts $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ an!

(b2) Demonstrieren Sie den auf dem dynamische Programmieren basierenden Algorithmus zur Ermittlung der minimalen Anzahl von Multiplikationen bei der Berechnung des Produkts $M_1 \times \ldots \times M_4$!

Füllen Sie dazu die Tabelle auf dem Lösungsblatt aus. Beachten Sie: Die Multiplikation von zwei Matrizen wird hier mit dem „Trivialalgorithmus“ gemäß (a) gemacht.

6. Aufgabe (2 + 3 = 5 Punkte)

(a) Wir betrachten die folgende Belegung der aussagenlogischen Variablen x_1, x_2 ($1 =$ wahr, $0 =$ falsch)

$$x_1 = 1, x_2 = 0.$$

Geben Sie eine Formel F in konjunktiver Normalform an, so daß die angegebene Belegung autark ist. Die Belegungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ *alleine* sollen allerdings beide *nicht* autark sein.

(b) Demonstrieren Sie den Polynomialzeitalgorithmus für das 2-SAT-Problem an folgender Formel.

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (z \vee y)$$

7. Aufgabe $(3 + 3 + 2 = 8$ Punkte$)$

Wir betrachten den effizientesten (logarithmisches Kostenmaß) rekursiven Algorithmus der Vorlesung zur Multiplikation von großen Zahlen der Vorlesung für das 10'er System.

(a) Demonstrieren Sie den Ablauf des Algorithmus für folgende Eingaben

$$1234 \text{ und } 5678,$$

indem Sie den Prozeduraufrufbaum hinschreiben. Es reicht, an jedem Knoten des Baums die aktuellen Parameter anzugeben.

(b) Schreiben Sie eine Summenformel für die Laufzeit des Algorithmus bei Eingabe von Zahlen mit n Ziffern, n Zweierpotenz, hin. Vereinfachen Sie die Summenformel soweit es geht, um die Laufzeit auszurechnen.

(c) Geben Sie die # benötigter Speicherplätze des Algorithmus in etwa an, das heißt in der O-Notation.