Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt
Dr. Lutz Falke

27. Februar 2018

Klausur Theorie der Programmiersprachen WS 2017/18

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

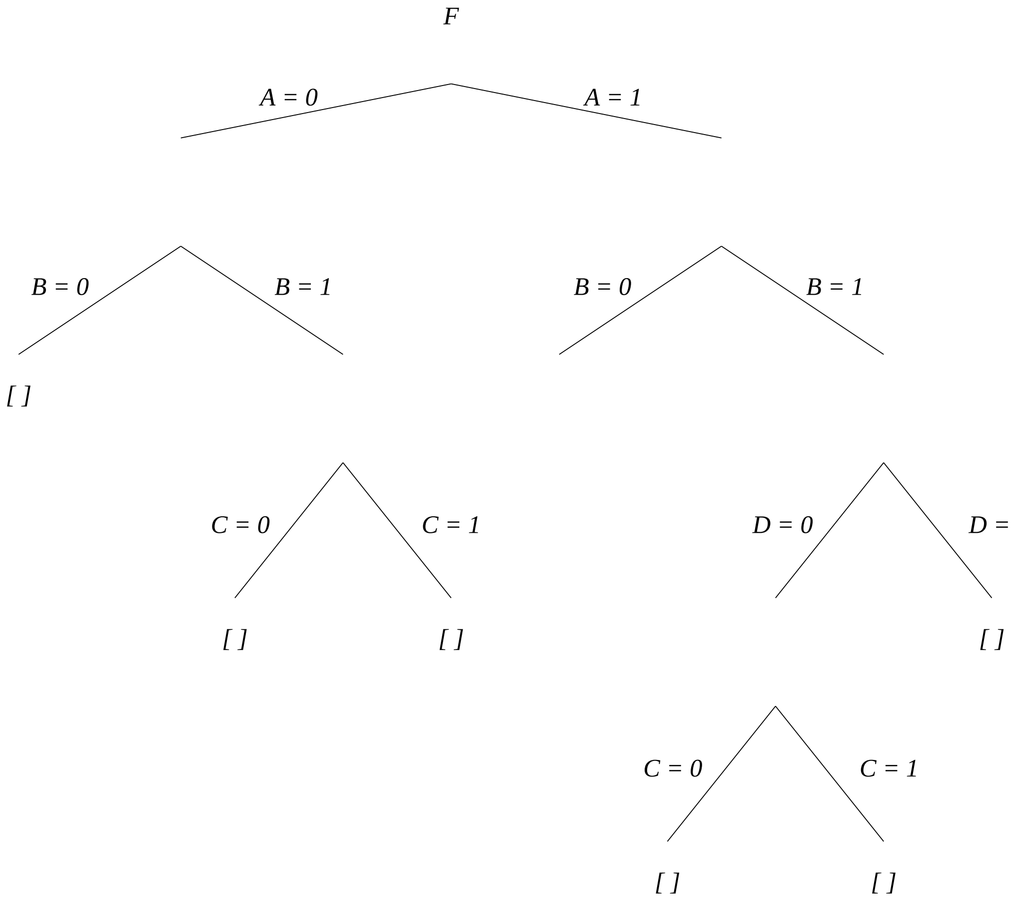
Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das Bild zeigt die Struktur eines Backtracking-Baumes zu F. Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.

Schreiben Sie dazu an *jeden* Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises!

Die Formel F besteht aus den Klauseln:

$$\begin{aligned} F \;=\; & (A \vee B) \;\wedge\; (A \vee \neg B \vee C) \;\wedge\; (A \vee B \vee \neg D) \;\wedge \\ & (\neg A \vee B) \;\wedge\; (\neg A \vee \neg B \vee C) \;\wedge \\ & (\neg B \vee \neg C) \;\wedge\; (\neg B \vee \neg D) \end{aligned}$$

Backtracking-Baum:



Aufgabe 2 (2+4+6=12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition für aussagenlogische Formeln in *Hornform* an.

(b) Wir betrachten das *Erfüllbarkeitsproblem* für aussagenlogische Formeln in *Hornform*.

Geben Sie ein Verfahren an, das die *Erfüllbarkeit* einer Formel in *Hornform* in *Polynomialzeit* (n Variablen, m Klauseln) testet.

Begründen Sie, warum der Algorithmus in Polynomialzeit läuft!

(c) Übersetzen Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem *Linearzeitverfahren* aus der Vorlesung in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in 3-*KNF*.

$$F = \Big(\big(A \wedge B\big) \ \vee\ C\Big) \ \leftrightarrow\ \big(A \vee D\big)$$

Aufgabe 3 (6+4+2+2+2=16 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine *äquivalente*, *bereinigte* Formel in *Pränexform.* (*Hinweis:* Bindung der Variablen beachten!)

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in *Skolemform* und bringen Sie die Matrix der Formel falls nötig in *KNF*.

(c) Geben Sie *vier* Terme aus dem Herbrand-Universum $D(F)$ der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie *eine* Formel aus der Herbrand-Expansion $E(F)$ der Formel aus (b) an.

(e) Stellen Sie die Formeln aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen ($A, B, C, \ldots$) dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

Beachte: u, x und y sind Variablen!

$$F = \forall u\Bigg(\bigg(\exists x \forall y\Big(P(x,y) \ \rightarrow\ Q(x,u)\Big)\bigg) \ \leftrightarrow\ Q(x,u)\Bigg)$$

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!

„Das Problem der *Erfüllbarkeit* einer prädikatenlogischen Formel ist …“

- entscheidbar
- *nicht* entscheidbar, jedoch semi-entscheidbar
- *nicht* entscheidbar und auch *nicht* semi-entscheidbar

(b) Wir betrachten die Reduktion des *Post'schen Korrespondenzproblems* auf das *Gültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik.

Geben Sie zu dem Post'schen Korrespondenzproblem auf dem Lösungsblatt die prädikatenlogische Formel an, die sich aus der Reduktion aus der Vorlesung ergibt.

$$PKP \quad = \quad \big((101,1),\ (1,011)\big)$$

Das heißt: $x_1 = 101 \qquad x_2 = 1$
$\qquad\qquad\quad y_1 = 1 \qquad\ \ y_2 = 011$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen *mit* den zugehörigen *allgemeinsten Unifikatoren* der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an!

$$K_1 = \Big\{P\big(x, f(y)\big),\ P\big(y,z\big),\ \neg Q\big(x\big)\Big\} \quad \text{und} \quad K_2 = \Big\{\neg P\big(x,x\big),\ Q\big(f(a)\big)\Big\}$$

Dabei sind x, y und z Variablen und a eine Konstante.

Aufgabe 6 (10(=2+6+2)+4=14 Punkte)

Wir betrachten das *Hornklauselprogramm* auf dem Lösungsblatt.

$$
\begin{aligned}
&S\big(x,y\big) \leftarrow R\big(x,\varepsilon,y\big)\\
&R\big(\varepsilon,y,y\big)\\
&R\big(l(x,u),y,z\big) \leftarrow R\big(u,l(x,y),z\big)
\end{aligned}
$$

- S und R sind *Prädikatsymbole*,
- l ist ein *Funktionssymbol*,
- u, x, y, z sind *Variablen*,
- ε, a, b, c sind *Konstanten*.

Am einfachsten, Sie stellen sich ε als die leere Liste und die Funktion l als Listenkonstruktion aus *Listenkopf* und *Restliste* vor. (Also $\varepsilon = [\ ]$, $l(a,\varepsilon) = [a]$, $l\big(a, l(b,\varepsilon)\big) = [a,b]$ usw.)

(a) (i) Geben Sie die prädikatenlogische Formel in *Pränexform* mit *Matrix in KNF* an, die beim Lauf des Programms mit der Zielklausel

$$S\Big(\underbrace{l\big(a,\ l\big(b,\ l(c,\varepsilon)\big)\big)}_{\text{Liste } [a,b,c]},\ y\Big)$$

als *unerfüllbar* nachgewiesen wird.

(ii) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel

$$S\Big(l\big(a,\ l\big(b,\ l(c,\varepsilon)\big)\big),\ y\Big)$$

vor.

Geben Sie die *Unifikatoren* und das *Rechenergebnis* in y an. Vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(iii) Geben Sie das Ergebnis an, das mit der Zielklausel

$$S\Big(\underbrace{l\big(a_1, l(\ldots, l(a_n,\varepsilon)\ldots)\big)}_{\text{Liste } [a_1,a_2,\ldots,a_n]},\ y\Big)$$

in y berechnet wird. Dabei seien die a_i Konstanten.

(b) Wir betrachten folgende Interpretation $\mathcal{A}$:

- Die Grundmenge $U_{\mathcal{A}}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.
- Die Konstanten sind interpretiert als $\varepsilon = 0$, $a = 23$, $b = 42$, $c = 16$.
- Die Funktion l ist als Nachfolger von y interpretiert, der Wert von x spielt für den Funktionswert keine Rolle.

$$l(x, y) := y + 1$$

- Die Prädikate S und R sind folgendermaßen interpretiert:

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{(x, y) \mid x = y\} \\ R & = & \{(x, y, z) \mid x + y = z\} \end{array}$$

Mit anderen Worten: $S(x, y)$ ist wahr genau dann, wenn x gleich y ist. $R(x, y, z)$ ist wahr genau dann, wenn z die Summe aus x und y ist.

Ihre in Teil (a)(i) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen" im Beweis aus Teil (a)(ii).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.