Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt
Dr. Lutz Falke

28. März 2017

Klausur Theorie der Programmiersprachen WS 2016/17

Aufgabe 1 (7 Punkte)

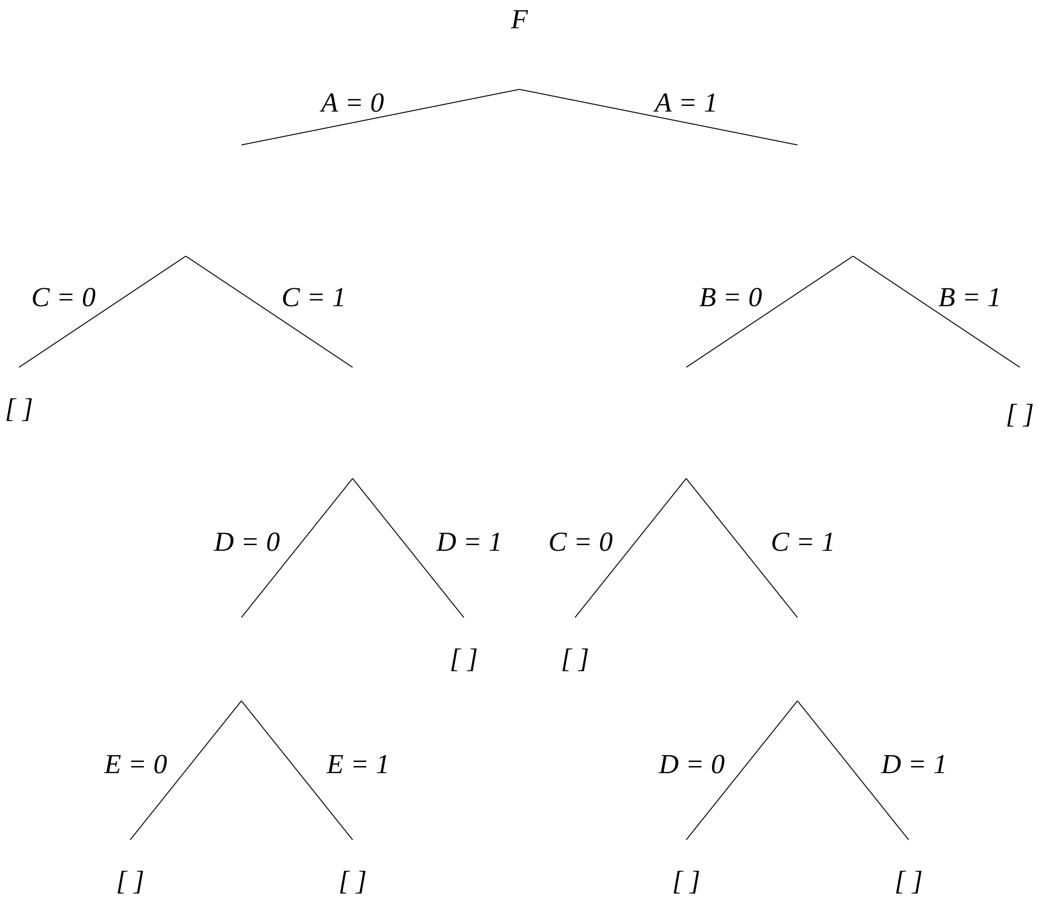
Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das Bild zeigt die Struktur eines Backtracking-Baumes zu F. Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.

Schreiben Sie dazu an *jeden* Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises!

Die Formel F besteht aus den Klauseln:

$$\begin{aligned} F \;=\; & (A \vee C) \;\wedge\; (A \vee \neg D) \;\wedge (A \vee D \vee \neg E) \;\wedge \\ & (\neg A \vee \neg B) \;\wedge\; (\neg A \vee C) \;\wedge\; (\neg A \vee \neg C \vee D) \;\wedge \\ & (\neg B \vee C \vee D) \;\wedge \\ & (C \vee E) \;\wedge\; (\neg C \vee \neg D) \;\wedge\; (\neg C \vee E) \end{aligned}$$

Backtracking-Baum:



Aufgabe 2 (2+4+6=12 Punkte)

(a) Formulieren Sie den *Endlichkeitssatz* der Aussagenlogik!

(b) Wir betrachten das *Erfüllbarkeitsproblem* für aussagenlogische Formeln in *2-KNF*.

Geben Sie ein Verfahren an, das die *Erfüllbarkeit* einer Formel in *2-KNF* in *Polynomialzeit* (abhängig von der Formelgröße) testet.

Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus in Polynomialzeit läuft!

(c) Übersetzen Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren aus der Vorlesung in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in *3-KNF*.

$$F = \Big(\big(A \wedge C\big) \vee B\Big) \rightarrow \big(A \leftrightarrow D\big)$$

Aufgabe 3 (7+5+2+2+2=18 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine *äquivalente*, *bereinigte* Formel in *Pränexform.* (*Hinweis:* Bindung der Variablen beachten!)

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in *Skolemform* und bringen Sie die Matrix der Formel falls nötig in *KNF*.

(c) Geben Sie vier Terme aus dem Herbrand-Universum $D(F)$ der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie zwei Formeln aus der Herbrand-Expansion $E(F)$ der Formel aus (b) an.

(e) Stellen Sie die Formeln aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen $(A, B, C, \ldots)$ dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

$$\forall x\Bigg(\bigg(\Big(\big(\forall u P(x,u)\big) \rightarrow \neg\exists y \forall u\Big(R(u) \rightarrow Q(x,y)\Big)\bigg) \;\wedge\; \Big(Q(y,x) \rightarrow R(y)\Big)\Bigg)$$

Aufgabe 4 **(6+3=9 Punkte)**

(a) Nennen Sie ein *unentscheidbares, aber semi-entscheidbares* Problem aus dem Bereich der Prädikatenlogik.

(i) Begründen Sie kurz, warum dieses Problem unentscheidbar ist. (Beweisidee)

(ii) Skizzieren Sie einen Algorithmus, der zeigt, dass das Problem semi-entscheidbar ist.

(b) Auf dem Lösungsblatt ist ein *Grundresolutionsschritt* zweier prädikatenlogischer Klauseln dargestellt.

Konstruieren Sie dazu einen *prädikatenlogischen Resolutionsschritt*, wie er sich aus dem *Lifting-Lemma* ergibt. Geben Sie die verwendeten Unifikatoren an!

$$
\begin{tikzcd}
\left\{P(x,y),\, Q(g(y))\right\} \arrow[d, "{[x/a],\ [y/f(a)]}"] & & \left\{\neg P(x,f(x)),\, \neg P(z,y),\, R(g(z))\right\} \arrow[d, "{[x/a],\ [z/a],\ [y/f(a)]}"] \\
\left\{P(a,f(a)),\, Q(g(f(a)))\right\} \arrow[dr, no head] & & \left\{\neg P(a,f(a)),\, R(g(a))\right\} \arrow[dl, no head] \\
& \left\{Q(g(f(a))),\, R(g(a))\right\} &
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen *mit* den zugehörigen *allgemeinsten Unifikatoren* der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an!

$$K_1 = \left\{P(x),\, P(f(x)),\, \neg R(y,y)\right\} \quad \text{und} \quad K_2 = \left\{\neg P(x),\, R(a,x)\right\}$$

Dabei sind x, y und z Variablen und a eine Konstante.

Aufgabe 6 (10(=2+6+2)+4=14 Punkte)

Wir betrachten das *Hornklauselprogramm* auf dem Lösungsblatt.

$$\begin{array}{lcl} A\big(\varepsilon, x, x\big) & & \\ A\big(l(u,x), y, l(u,z)\big) & \leftarrow & A\big(x, y, z\big) \end{array}$$

A ist ein dreistelliges *Prädikatsymbol*; ε ist eine *Konstante*; l ist ein zweistelliges *Funktionssymbol*; u, x, y, z sind *Variablen*; a, b, c sind ebenfalls Konstanten.
Am einfachsten, Sie stellen sich ε als die leere Liste, l als Listenkonstruktion aus Listenkopf und Restliste vor. (Also $\varepsilon = [\;]$, $l(a,\varepsilon) = [a]$, $l\big(a, l(b,\varepsilon)\big) = [a,b]$ usw.)

(a) (i) Geben Sie die prädikatenlogische Formel in *Pränexform* mit *Matrix in KNF* an, die beim Lauf des Programms mit der Zielklausel

$$A\Big(l\big(a, l(b,\varepsilon)\big),\ l\big(c,\varepsilon\big),\ z\Big)$$

als *unerfüllbar* nachgewiesen wird.

(ii) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel

$$A\Big(l\big(a, l(b,\varepsilon)\big),\ l\big(c,\varepsilon\big),\ z\Big)$$

vor.

Geben Sie die Unifikatoren und das *Rechenergebnis* in z an. Vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(iii) Geben Sie das Ergebnis an, das mit der Zielklausel

$$A\Big(\underbrace{l\big(a_1, l(\ldots, l(a_n,\varepsilon)\ldots)\big)}_{\text{Liste } [a_1,a_2,\ldots,a_n]},\ \underbrace{l\big(b_1, l(\ldots, l(b_m,\varepsilon)\ldots)\big)}_{\text{Liste } [b_1,b_2,\ldots,b_m]},\ z\Big)$$

in z berechnet wird. Dabei seien die a_i und b_j Konstanten.

(b) Wir betrachten folgende Interpretation $\mathcal{A}$:

- Die Grundmenge $U_{\mathcal{A}}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.
- Die Konstanten sind interpretiert als $\varepsilon = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
- Die Funktion l ist als Addition interpretiert.

$$l(x, y) := x + y$$

- Das Prädikat A ist folgendermaßen interpretiert:

$$A = \big\{(x, y, z) \mid x + y = z\big\}$$

  Mit anderen Worten: $A(x, y, z)$ ist wahr genau dann, wenn z die Summe aus x und y ist.

Ihre in Teil (a)(i) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen“ im Beweis aus Teil (a)(ii).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.