Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt
Dr. Lutz Falke

18. Februar 2016

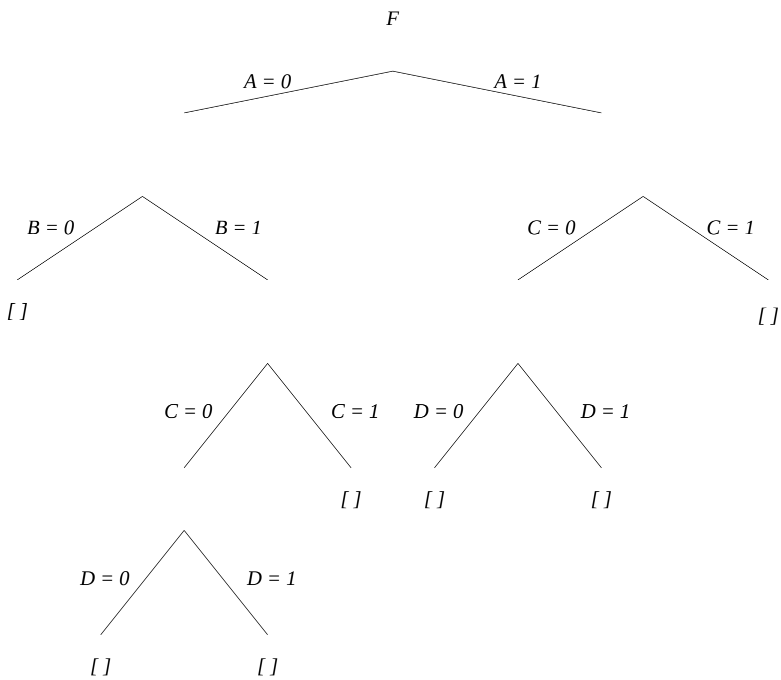
Klausur Theorie der Programmiersprachen WS 2015/16

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das Bild zeigt die Struktur eines Backtracking-Baumes von F. Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.
Schreiben Sie dazu an *jeden* Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises!

$$
\begin{aligned}
F \;=\; & (A \vee B) \wedge (A \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge \\
& (\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (C \vee D)
\end{aligned}
$$

Backtracking-Baum:



Aufgabe 2 (2+4+6=12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition für aussagenlogische Formeln in *Hornform* an.

(b) Wir betrachten das *Erfüllbarkeitsproblem* für aussagenlogische Formeln in *Hornform*.

Geben Sie ein Verfahren an, das die Erfüllbarkeit einer Formel in Hornform in Polynomialzeit (n Variablen, m Klauseln) testet.

Begründen Sie, warum der Algorithmus in Polynomialzeit läuft!

(c) Übersetzen Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren aus der Vorlesung in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in 3-*KNF*.

$$F = \Big((A \leftrightarrow B) \wedge C \Big) \rightarrow D$$

Aufgabe 3 (6+4+2+2+2=16 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine *äquivalente* bereinigte Formel in Pränexform.

x, y, z sind Variablen.

$$F = \forall z \left[\Bigg(\forall x \Big((\exists y \, R(y,z)) \rightarrow P(x) \Big) \Bigg) \rightarrow Q(y,z) \right]$$

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in *Skolemform* und bringen Sie die Matrix der Formel falls nötig in *KNF*.

(c) Geben Sie vier Terme aus dem Herbrand-Universum $D(F)$ der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie eine Formel der Herbrand-Expansion $E(F)$ der Formel aus (b) an, die nach zwei Schritten der Expansion entsteht.

(e) Stellen Sie die Formel aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen ($A, B, C, \ldots$) dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!

„Das Problem der *Widersprüchlichkeit* einer prädikatenlogischen Formel ist ...“

- entscheidbar
- *nicht* entscheidbar, jedoch semi-entscheidbar

(b) Wir betrachten die Reduktion des *Post'schen Korrespondenzproblems* auf das *Gültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik.

Geben Sie zu dem Post'schen Korrespondenzproblem auf dem Lösungsblatt die prädikatenlogische Formel an, die sich aus der Reduktion aus der Vorlesung ergibt.

$$PKP \quad = \quad \Big((1, 011), \ (101, 1) \Big)$$

Das heißt: $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 101$
$y_1 = 011$ $\quad y_2 = 1$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen *mit* den zugehörigen *allgemeinsten Unifikatoren* der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an!

$$K_1 = \Big\{ P\big(x,y\big), \ P\big(y,f(x)\big), \ \neg Q\big(y\big) \Big\} \quad \text{und} \quad K_2 = \Big\{ R\big(x,z\big), \ \neg P\big(z,x\big), \ Q\big(y\big) \Big\}$$

Dabei sind x, y und z Variablen.

Aufgabe 6 (8(=4+2+2)+4=12 Punkte)

Wir betrachten das *Hornklauselprogramm* auf dem Lösungsblatt.

M ist ein dreistelliges *Prädikatsymbol*; 0 ist eine *Konstante*; s ist ein einstelliges *Funktionssymbol* und x, y, z sind *Variablen*.
Am einfachsten, Sie stellen sich 0 als die Zahl Null, s als die Nachfolgerfunktion (also $s(0) = 1$, $s(s(0)) = 2$, usw.) vor.

$$\begin{array}{lll} M\big(0, y, 0\big) & & \\ M\big(x, 0, 0\big) & & \\ M\big(s(x), s(y), s(z)\big) & \leftarrow & M\big(x, y, z\big) \end{array}$$

(a) (i) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel

$$M\big(s(s(0)), s(s(s(0))), z\big)$$

vor.

Geben Sie die Unifikatoren an und vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(ii) Geben Sie das Ergebnis an, das mit der Zielklausel

$$M\big(s^n(0), s^m(0), z\big)$$

in z berechnet wird. Die Schreibweise $s^k(0)$ soll hier folgendes bedeuten:

$$s^k(0) = \underbrace{s(s(\ldots s}_{k\text{-mal}}(0)\ldots))$$

(iii) Geben Sie die prädikatenlogische Formel in *Pränexform* mit *Matrix in KNF* an, die beim Lauf des Programms mit der Zielklausel $M\big(s(s(0)), s(s(s(0))), z\big)$ als *unerfüllbar* nachgewiesen wird.

(b) Wir betrachten folgende Interpretation $\mathcal{A}$:

- Die Grundmenge $U_{\mathcal{A}}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.
- Die Konstante 0 ist die Null.
- Die Funktion s ist interpretiert als:

$$s(x) := x + 1$$

- M ist folgendermaßen interpretiert:

$$M = \big\{(x, y, z) \mid x = z \text{ oder } y = z\big\}$$

  Mit anderen Worten: $M(x, y, z)$ ist wahr genau dann, wenn die erste Stelle mit der dritten oder die zweite mit der dritten Stelle übereinstimmt.

Ihre in Teil (a)(iii) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen“ im entsprechenden Beweis aus Teil (a)(i).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.