Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt
Dipl.-Inf. Lutz Falke

13. März 2015

Klausur Theorie der Programmiersprachen
WS 2014/15

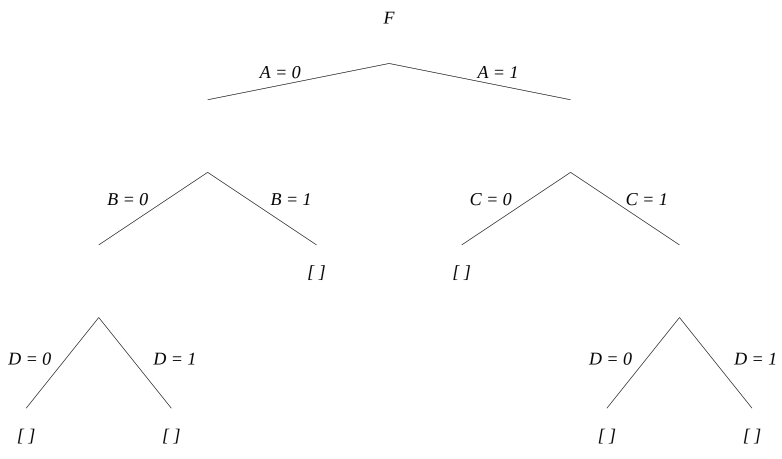
Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das Bild zeigt die Struktur eines Backtracking-Baumes von F. Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.

Schreiben Sie dazu an *jeden* Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises!

$$
\begin{aligned}
F \;=\;& (A \vee \neg B) \;\wedge\; (\neg A \vee C) \;\wedge\; (\neg A \vee \neg C \vee D) \;\wedge \\
& (A \vee D) \;\wedge\; (B \vee \neg D) \;\wedge\; (\neg C \vee \neg D)
\end{aligned}
$$

Backtracking-Baum:



Aufgabe 2 (2+4+6=12 Punkte)

(a) Formulieren Sie den *Endlichkeitssatz* der Aussagenlogik.

(b) Wir betrachten das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in *Hornform*.

Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus (*Markieralgorithmus*) an, der dieses Problem löst. Begründen Sie, warum der Algorithmus in Polynomialzeit läuft.

(c) Übersetzen Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren der Vorlesung in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in 3-*KNF*.

$$F = \Big(\neg(A \leftrightarrow B)\Big) \leftrightarrow C$$

Aufgabe 3 (4+2+2+2+2=12 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine *äquivalente* bereinigte Formel in Pränexform.

$$\forall x \Bigg[\Bigg(\forall y \exists z \Big(P(x,z) \rightarrow Q(y) \Big) \Bigg) \wedge \neg \Big(\forall y P(x,y) \Big) \Bigg]$$

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in Skolemform und bringen Sie die Matrix der Formel falls nötig in *KNF*.

(c) Geben Sie drei Terme aus dem Herbrand-Universum $D(F)$ der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie eine Formel der Herbrand-Expansion $E(F)$ der Formel aus (b) an, die nach zwei Schritten der Expansion entsteht.

(e) Stellen Sie die Formel aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen $(A, B, C, \ldots)$ dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Auf dem Lösungsblatt finden Sie die Darstellung einer Grundresolution. Geben Sie die prädikatenlogische Resolution an, die sich anhand des *Lifting-Lemmas* daraus ergibt.

Geben Sie auch den verwendeten allgemeinsten Unifikator und die Substitution, um aus der prädikatenlogischen Resolventen die Grundinstanz zu erhalten, an.

$$\begin{tikzcd} \{Q(x, y), R(x)\} \arrow[d, "{[x/a], [y/a]}"] & & \{\neg Q(u, u), P(v)\} \arrow[d, "{[u/a], [v/b]}"] \\ \{Q(a, a), R(a)\} \arrow[dr, no head] & & \{\neg Q(a, a), P(b)\} \arrow[dl, no head] \\ & \{R(a), P(b)\} & \end{tikzcd}$$

(b) Nennen Sie ein *nicht entscheidbares, aber semi-entscheidbares* Problem aus dem Bereich der Prädikatenlogik. Begründen Sie kurz ihre Antwort. (Warum ist das Problem semi-entscheidbar?)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen *mit* den zugehörigen *allgemeinsten Unifikatoren* der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an!

$$\{S(x),\ S(f(x)),\ \neg T(z)\} \quad \text{und} \quad \{\neg S(f(x)),\ T(f(y))\}$$

Dabei sind x, y und z Variablen.

Aufgabe 6 (8(=4+2+2)+4=12 Punkte)

Wir betrachten das Hornklauselprogramm auf dem Lösungsblatt.

N ist ein zweistelliges *Relationssymbol*; a ist eine *Konstante*; f und t sind einstellige *Funktionssymbole* und x, y, z sind *Variablen*.
Am einfachsten, Sie stellen sich a als leeren Bitstring, $f(a)$ als 0, $t(a)$ als 1, $f(t(a))$ als 10, $t(f(a))$ als 01 usw. vor.

$$\begin{array}{lll} N\big(a,\ a\big) & & \\ N\big(t(x),\ f(y)\big) & \leftarrow & N\big(x,\ y\big) \\ N\big(f(x),\ t(y)\big) & \leftarrow & N\big(x,\ y\big) \end{array}$$

(a) (i) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel $N\big(t(t(f(a))), z\big)$ (entspricht $N(011, z)$) vor.

Geben Sie die Unifikatoren an und vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(ii) Geben Sie das Ergebnis an, das mit der Zielklausel $N\big(b_1 b_2 \ldots b_n, z\big)$ mit $b_i \in \{0, 1\}$, oder anders geschrieben $N\big(\Delta(\ldots\Delta(a)\ldots), z\big)$ mit $\Delta \in \{t, f\}$, in z berechnet wird.

(iii) Geben Sie die prädikatenlogische Formel *in Pränexform* mit *Matrix in KNF* an, die beim Lauf des Programms mit der Zielklausel $N\big(t(t(f(a))), z\big)$ bzw. $N(011, z)$ als *unerfüllbar* nachgewiesen wird.

(b) Wir betrachten folgende Interpretation:

- Die Grundmenge ist die Menge der natürlichen Zahlen.
- Die Konstante a ist die Null.
- Die Funktionen sind interpretiert als:

$$f(x) := 2x \quad \text{und} \quad t(x) := 2x + 1$$

- N ist folgendermaßen interpretiert:
  $N(u, v)$ ist wahr genau dann, wenn $u + v = 2^k - 1$ ist. Mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$. Also $N(u, v)$ ist wahr $\Leftrightarrow (u + v) \in \{0, 1, 3, 7, 15, \ldots\}$.

Ihre in Teil (a)(iii) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen“ im entsprechenden Beweis aus Teil (a)(i).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.