Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt
Dipl.-Inf. Lutz Falke

19. Februar 2014

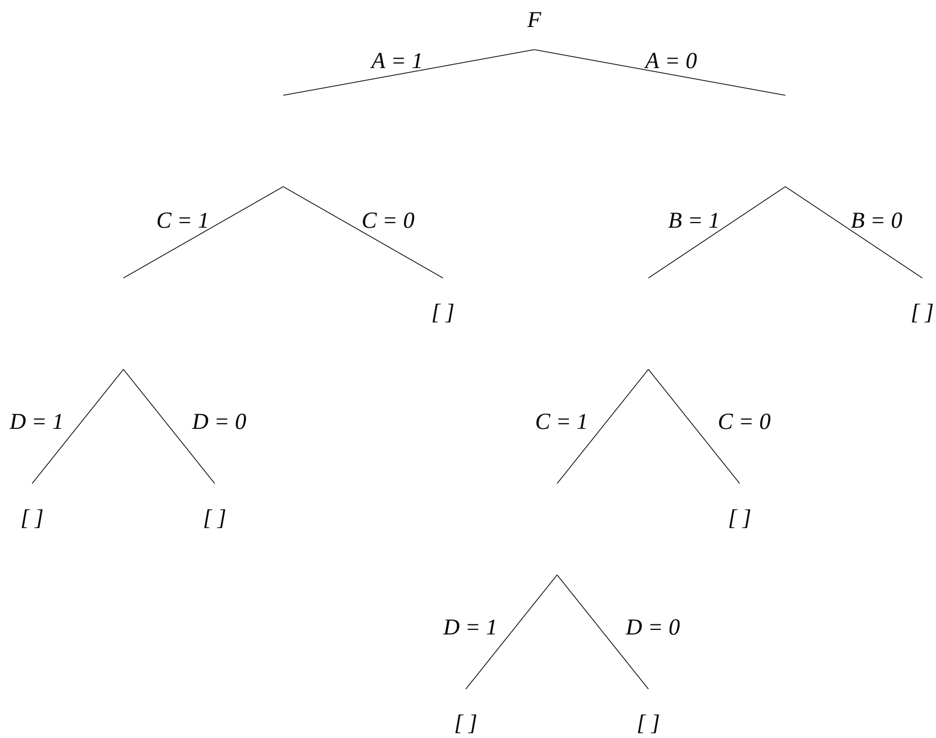
# Klausur Theorie der Programmiersprachen WS 2013/14

## Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die aussagenlogische Formel $F$ auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das Bild zeigt die Struktur eines Backtracking-Baumes von $F$. Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.
Schreiben Sie dazu an *jeden* Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises!

$$F = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D)$$

Backtracking-Baum:



## Aufgabe 2 (2+4+6=12 Punkte)

(a) Formulieren Sie die *Korrektheit* und die *Vollständigkeit* der *aussagenlogischen Resolution*. (Resolutionssatz der Aussagenlogik)

(b) Wir betrachten das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in 2-*KNF*.

Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der dieses Problem auf Basis der *Resolution* löst. Begründen Sie, warum ihr Algorithmus in Polynomialzeit läuft.

*Hinweis:* Wieviele verschiedene Klauseln bzw. Resolventen sind möglich?

(c) Übersetzen Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren der Vorlesung in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in 3-*KNF*.

$$F = \big(\neg(A \wedge B)\big) \rightarrow (B \wedge C)$$

## Aufgabe 3 (6+3+2+2+2=15 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine *äquivalente* bereinigte Formel in Pränexform.

$$\Bigg(\forall z \bigg(\Big(\forall x\ P(x)\Big) \rightarrow Q(z)\bigg)\Bigg) \rightarrow \neg\Big(\exists z \forall y\ R(y,z)\Big)$$

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in Skolemform.

(c) Geben Sie drei Terme aus dem Herbrand-Universum $D(F)$ der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie eine Formel der Herbrand-Expansion $E(F)$ der Formel aus (b) an, die nach zwei Schritten der Expansion entsteht.

(e) Stellen Sie die Formel aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen $(A, B, C, \ldots)$ dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

## Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie ihre Antwort!

„Das *Erfüllbarkeitsproblem* der Prädikatenlogik ist ...“

(i) entscheidbar.

(ii) semi-entscheidbar.

(iii) *nicht* semi-entscheidbar.

(b) Wir betrachten die Reduktion des *Post'schen Korrespondenzproblems* auf das *Allgemeingültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik.

Geben Sie zu dem Post'schen Korrespondenzproblem auf dem Lösungsblatt die prädikatenlogische Formel an, die sich aus der Reduktion aus der Vorlesung ergibt.

$$PKP \quad = \quad \Big((1, 101),\ (010, 01),\ (10, 0)\Big)$$

Das heißt: $\begin{array}{lll} x_1 = 1 & x_2 = 010 & x_3 = 10 \\ y_1 = 101 & y_2 = 01 & y_3 = 0 \end{array}$

## Aufgabe 5 (8 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen *mit* den zugehörigen *allgemeinsten Unifikatoren* der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an!

$$\Big\{\neg P(x),\ Q(x,z),\ Q\big(y, f(x)\big)\Big\} \quad \text{und} \quad \Big\{\neg Q(y,x),\ P(x)\Big\}$$

Dabei sind $x, y$ und $z$ Variablen.

## Aufgabe 6 (8(=4+2+2)+4=12 Punkte)

Wir betrachten das Hornklauselprogramm auf dem Lösungsblatt.
$C$ ist ein zweistelliges *Relationssymbol*; $a$ und 0 sind *Konstanten*; $s$, $f$ und $t$ sind einstellige *Funktionssymbole* und $x, y, z$ sind *Variablen*.
Am einfachsten, Sie stellen sich $a$ als leeren Bitstring; 0 als Null, $s(0)$ als 1, $s(s(0))$ als 2; sowie $f(a)$ als 0, $t(a)$ als 1, $f(t(a))$ als 10, $t(f(a))$ als 01 usw. vor.

$$\begin{array}{lll} C(a,0) & & \\ C\big(t(x), s(y)\big) & \leftarrow & C(x,y) \\ C\big(f(x), y\big) & \leftarrow & C(x,y) \end{array}$$

(a) (i) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel $C\big(t(f(t(a))), z\big)$ (entspricht $C(101, z)$) vor. Geben Sie die Unifikatoren an und vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(ii) Geben Sie das Ergebnis an, das mit der Zielklausel $C\big(b_1 b_2 \ldots b_n, z\big)$ mit $b_i \in \{0,1\}$, oder anders geschrieben $C\big(\Delta(\ldots \Delta(a) \ldots), z\big)$ mit $\Delta \in \{t, f\}$, in $z$ berechnet wird.

(iii) Geben Sie die prädikatenlogische Formel *in Pränexform* mit *Matrix in KNF* an, die beim Lauf des Programms mit der Zielklausel $C\big(t(f(t(a))), z\big)$ bzw. $C(101, z)$ als *unerfüllbar* nachgewiesen wird.

(b) Wir betrachten folgende Interpretation:

- Die Grundmenge ist die Menge der natürlichen Zahlen.
- Die Konstante $a$ ist die Null. Die Konstante 0 ist die Null.
- Die Funktionen sind interpretiert als:

$$s(x) := x + 1\,, \quad f(x) := 2x \quad \text{und} \quad t(x) := 2x + 1$$

- $C$ ist folgendermaßen interpretiert:

$$C(u, v) \text{ ist wahr genau dann, wenn } u \geq 2^v - 1 \text{ ist.}$$

Ihre in Teil (a)(iii) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen“ im entsprechenden Beweis aus Teil (a)(i).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.