Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt
Dipl.-Inf. Lutz Falke

12. Februar 2013

Klausur Theorie der Programmiersprachen WS 2012/13

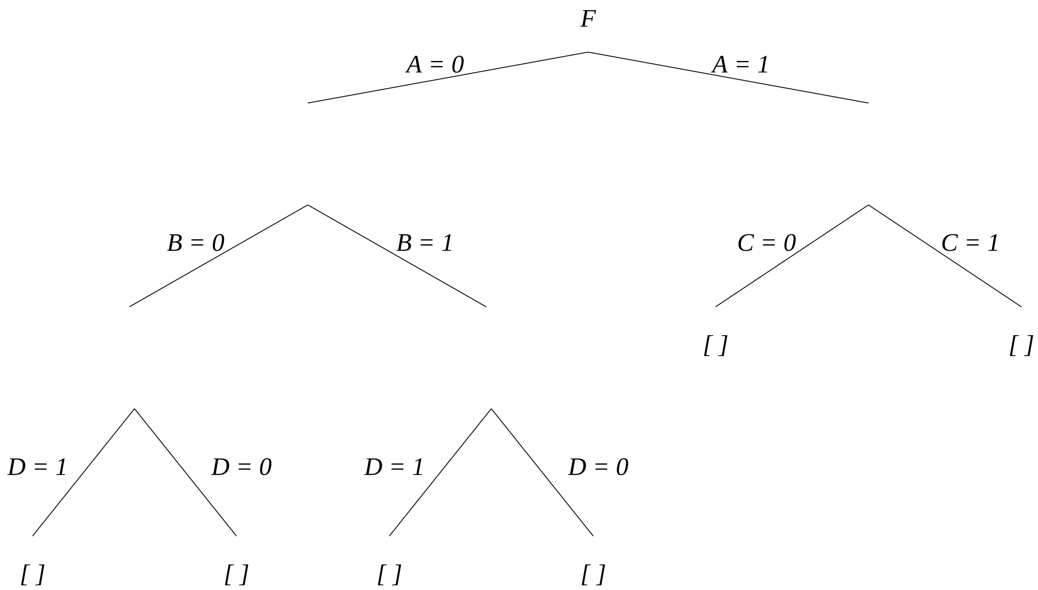
Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das Bild zeigt die Struktur eines Backtracking-Baumes von F.
Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.
Schreiben Sie dazu an jeden Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises.

Die Formel F besteht aus den Klauseln:

$$(\neg A \vee C)\,, \quad (\neg A \vee \neg C)\,, \quad (A \vee \neg B \vee D)\,, \quad (A \vee \neg D) \quad \text{und} \quad (B \vee D).$$

Backtrackingbaum:



Aufgabe 2 (3+3+6=12 Punkte)

(a) Formulieren Sie den *Resolutionssatz* der Aussagenlogik.

(b) Wie viele verschiedene Resolventen können aus einer Formel mit n Variablen maximal entstehen? Tautologien sollen hier zur Vereinfachung mitgezählt werden. Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Übersetzen Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren der Vorlesung in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in *3-KNF*.

$$(A \leftrightarrow B) \vee \neg(C \rightarrow D)$$

Aufgabe 3 (4+3+2+2+4=15 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine äquivalente bereinigte Formel in Pränexform.

$$\forall y \left(\Big(\forall x P(x,y) \Big) \leftrightarrow \Big(\exists z Q(z,y) \Big) \right)$$

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in Skolemform.

(c) Geben Sie drei Terme aus dem Herbrand-Universum $D(F)$ der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie eine kleine Formel der Herbrand-Expansion $E(F)$ der Formel aus (b) an.

(e) Stellen Sie die Formel aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen $A, B, C, \dots$ dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(a) Auf dem Lösungsblatt finden Sie die Darstellung einer Grundresolution. Geben Sie die prädikatenlogische Resolution an, die sich anhand des *Lifing-Lemmas* daraus ergibt.

$$\begin{tikzcd}
\left\{P(x,\, y)\,,\, P\big(f(a),\, z\big)\right\} \arrow[d, "{[x/f(a)],\ [y/g(b)],\ [z/g(b)]}"] & & \left\{\neg P\big(f(x),\, g(y)\big)\,,\, Q(x,\, y)\right\} \arrow[d, "{[x/a],\ [y/b]}"] \\
\left\{P\big(f(a),\, g(b)\big)\right\} \arrow[dr, dash] & & \left\{\neg P\big(f(a)\,, g(b)\big)\,,\, Q(a,\, b)\right\} \arrow[dl, dash] \\
& \left\{Q(a,\, b)\right\} &
\end{tikzcd}$$

(b) Nennen Sie ein *nicht entscheidbares, aber semi-entscheidbares* Problem aus dem Bereich der Prädikatenlogik. Begründen Sie kurz ihre Antwort. (Warum ist das Problem semi-entscheidbar?)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen mit den zugehörigen allgemeinsten Unifikatoren der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an.

$$\left\{\neg R(z)\,,\, \neg S(z)\,,\, \neg S\big(g(x)\big)\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\neg R(x)\,,\, S\big(g(y)\big)\right\}$$

Dabei sind x, y und z Variablen.

Aufgabe 6 (10(=4+4+2)+6=16 Punkte)

Wir betrachten das Hornklauselprogramm auf dem Lösungsblatt. (M ist ein zweistelliges *Relationssymbol*, 0 eine *Konstante*, s ist ein einstelliges *Funktionssymbol* und x, y, z sind *Variablen*. Am einfachsten, Sie stellen sich 0 als Null, $s(0)$ als 1, $s(s(0))$ als 2 usw. vor.)

$$M(0,\ 0)$$
$$M\big(s(0),\ s(0)\big)$$
$$M\Big(s\big(s(x)\big),\ y\Big) \leftarrow M(x,\ y)$$

(a) (i) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel $M(4, z)$ und $M(3, z)$ vor.

Geben Sie auch die Unifikatoren an und vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(ii) Geben Sie das Ergebnis an, das mit der Zielklausel $M(s^n(0), z)$ in z berechnet wird. Mit $s^n(0)$ ist $\underbrace{s(s(\ldots s(}_{n \text{ mal}}0)\ldots))$ gemeint.

(iii) Geben Sie die prädikatenlogische Formel *in Pränexform* mit *Matrix in KNF* an, die beim Lauf des Programms mit der Zielklausel $M(4, z)$ als unerfüllbar nachgewiesen wird.

(b) Wir betrachten folgende Interpretation:

- Die Grundmenge ist die Menge der natürlichen Zahlen, 0 ist die Null und s ist die identische Abbildung. (Es gilt $s(a) = a$.)
- M ist folgendermaßen interpretiert:
  $M(a, b)$ ist wahr genau dann, wenn $a = b$ ist.

Ihre in Teil (a)(iii) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen“ im entsprechenden Beweis aus Teil (a)(i).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.