Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt

Klausur Theorie der Programmiersprachen
WS 2011/12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

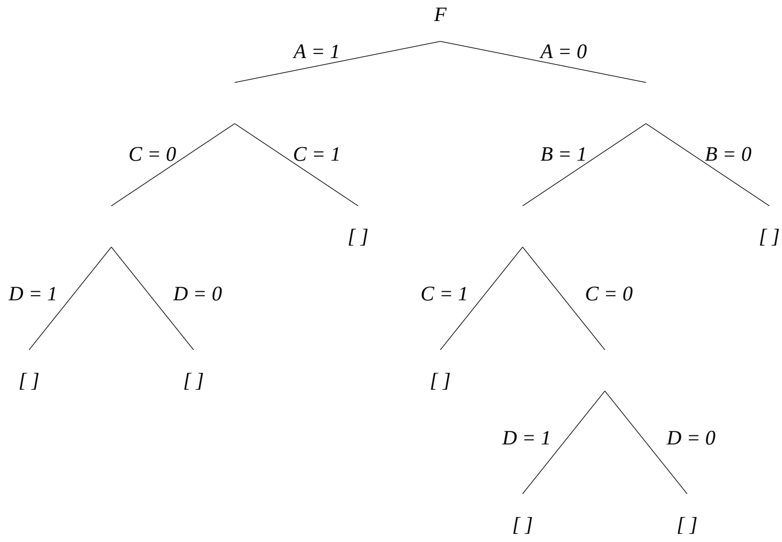
Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das sehen Sie an dem angegebenen Backtrackingbaum (Rekursionsbaum der Davis-Putnam Prozedur.)
Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis!
Schreiben Sie dazu an jeden Knoten des Baumes die zugehörige Klausel dieses Resolutionsbeweises!

Die Formel F besteht aus den Klauseln:

$$(A \vee B)\,, \quad (C \vee D)\,, \quad (\neg A \vee \neg C)\,,$$

$$(\neg A \vee \neg D)\,, \quad (\neg B \vee \neg C) \quad \text{und} \quad (\neg B \vee \neg D).$$

Backtrackingbaum:



Aufgabe 2 (3+2+4=9 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Endlichkeitssatz der Aussagenlogik!

(b) Geben Sie die Anzahl der Booleschen Funktionen auf n Eingabevariablen an!

(c) Übersetzen Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren der Vorlesung in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in 3-KNF.

$$\big(A \vee \neg B\big) \leftrightarrow \neg\big(B \wedge C\big)$$

Aufgabe 3 (4+3+2+2+4=15 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine äquivalente bereinigte Formel in Pränexform.

$$\forall u\Bigg(\bigg(\Big(\forall x Q(x,u)\Big) \leftrightarrow P(y,u)\bigg) \wedge \exists x R(x,u)\Bigg)$$

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in Skolemform.

(c) Geben Sie drei Terme aus dem Herbrand Universum der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie die kleinste Formel der Herbrand Expansion der Formel aus (b) an.

(e) Stellen Sie die Formel aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen $A, B, C, \ldots$ dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

Aufgabe 4 (3+5=8 Punkte)

(a) Welche der beiden folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie ihre Antwort!

Das *Erfüllbarkeitsproblem* der Prädikatenlogik ist ...

(i) semi-entscheidbar

(ii) nicht semi-entscheidbar

(b) Wir betrachten die Reduktion des *Post'schen Korrespondenzproblems* auf das *Allgemeingültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik.

Geben Sie zu dem Post'schen Korrespondenzproblem auf dem Lösungsblatt die prädikatenlogische Formel an, die sich aus der Reduktion aus der Vorlesung ergibt.

$$\textit{Post'sches Korrespondenzproblem} = \Big\{ (10, 0), (010, 101), (1, 10) \Big\}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen mit den zugehörigen allgemeinsten Unifikatoren der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an.

$$\Big\{P\big(f(x)\big), \neg Q(z), P\big(z\big)\Big\} \quad \text{und} \quad \Big\{Q\big(f(x)\big), \neg P(x)\Big\}$$

Aufgabe 6 (10(=4+2+4)+6=16 Punkte)

Wir betrachten das Hornklauselprogramm auf dem Lösungsblatt. (M ist ein zweistelliges *Relationssymbol*, 0 eine *Konstante*, S ist ein einstelliges *Funktionssymbol* und x, y, z sind *Variablen*. Am einfachsten, Sie stellen sich 0 als Null, $S(0)$ als 1, $S(S(0))$ als 2 usw. vor.)

(a) (i) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel $M(4, z)$ vor.

Geben Sie auch die Unifikatoren an und vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(ii) Lassen wir das Programm mit Zielklausel $M(4, z)$ laufen, so wird eine prädikatenlogische Formel als unerfüllbar nachgewiesen.

Geben Sie diese Formel in KNF an, inklusive aller Quantoren.

(iii) Geben Sie das Ergebnis an, das bei Eingabe der Zielklausel $M(S^n(0), z)$ in z berechnet wird.

(b) Wir betrachten folgende Interpretation:

- Die Grundmenge ist die Menge der natürlichen Zahlen, 0 ist die Null und S ist die Nachfolgerfunktion.
- M ist folgendermaßen interpretiert:
  $M(a, b)$ ist wahr genau dann, wenn $a \leq b$ ist.

Ihre in Teil (a)(ii) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrieren Sie das durch „Hochgehen“ in dem Beweis aus Teil (a)(i).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.

$$M(0,\ 0)$$

$$M\big(S(0),\ 0\big)$$

$$M\Big(S\big(S(x)\big),\ S(y)\Big) \leftarrow M(x,\ y)$$