Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Andreas Goerdt

Klausur Theorie der Programmiersprachen
WS 2010/11

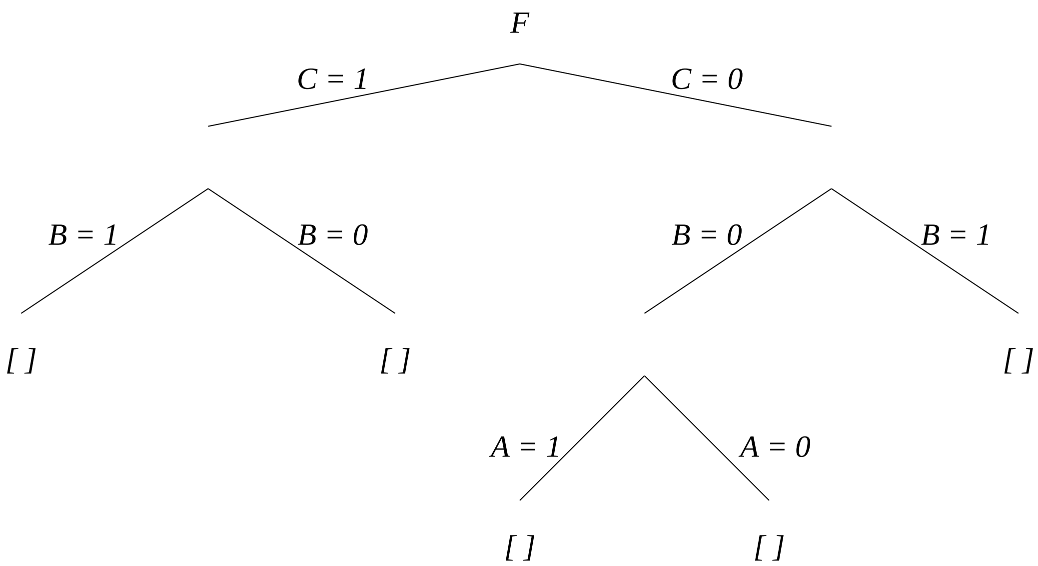
Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die aussagenlogische Formel F auf dem Lösungsblatt ist unerfüllbar. Das zeigt der angegebene Backtrackingbaum (Baum der Davis-Putnam Prozedur.)
Konstruieren Sie einen zu dem Baum gehörenden Resolutionsbeweis.
Schreiben Sie dazu an jeden Knoten des Baumes die zugehörige Kausel dieses Resolutionsbeweises!

Die Formel F besteht aus den Klauseln:

$$A \vee C \quad \text{und} \quad \neg A \vee C \quad \text{und}$$
$$\neg B \vee \neg C \quad \text{und} \quad \neg B \vee C \quad \text{und} \quad B \vee \neg C.$$

Backtrackingbaum:



Aufgabe 2 (2+4+5=11 Punkte)

(a) Ergänzen Sie den Halbsatz auf dem Lösungsblatt zum Endlichkeitssatz der Aussagenlogik!

Eine unendliche Menge aussagenlogischer Formeln ist **unerfüllbar** genau dann, wenn ...

(b) Wir betrachten Erfüllbarkeitsproblem für 2-KNF.

Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der dieses Problem auf Basis der *Resolution* löst. Begründen Sie, warum ihr Algorithmus in Polynomialzeit läuft.

Hinweis: Wieviele verschiedene Klauseln sind möglich?

(c) Transformieren Sie die aussagenlogische Formel auf dem Lösungsblatt mit dem Linearzeitverfahren der Vorlesung in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in 3-KNF.

$$(A \leftrightarrow B) \wedge \Big(\neg B \to (A \vee C)\Big)$$

Aufgabe 3 (4+3+2+2+4=15 Punkte)

(a) Transformieren Sie die prädikatenlogische Formel auf dem Lösungsblatt in eine äquivalente bereinigte Formel in Pränexform.

$$\Bigg(\forall x \exists y \Big(\big(P(x,y) \to R(g(x))\big) \wedge P(x,y)\Big)\Bigg) \wedge \neg \Big(\big(\forall x R(x)\big) \to \big(\forall y Q(f(y))\big)\Big)$$

(b) Transformieren Sie das Ergebnis aus (a) in Skolemform.

(c) Geben Sie drei Terme aus dem Herbrand Universum der Formel aus (b) an.

(d) Geben Sie die kleinste Formel der Herbrand Expansion der Formel aus (b) an.

(e) Stellen Sie die Formel aus (d) als Formel mit klassischen aussagenlogischen Variablen $A, B, C, \ldots$ dar. (Das heißt, so wie die Grundresolution die Formel sehen würde.)

Aufgabe 4 (3+5=8 Punkte)

(a) Welche der beiden folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie ihre Antwort.

„Das *Allgemeingültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik ist ...“

(i) semi-entscheidbar

(ii) nicht semi-entscheidbar

(b) Wir betrachten die Reduktion des *Post'schen Korrespondenzproblems* auf das *Allgemeingültigkeitsproblem* der Prädikatenlogik.

Geben Sie zu dem Post'schen Korrespondenzproblem auf dem Lösungsblatt die prädikatenlogische Formel an, die sich aus der Reduktion aus der Vorlesung ergibt.

$$\begin{array}{lll} \textit{Post'sches Korrespondenzproblem} & = \{ & (0, 011) \\ & & (11, 1) \quad \} \end{array}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen der beiden Klauseln auf dem Lösungsblatt an.

$$\Big\{P\big(f(x)\big), \neg Q(z), P\big(z\big)\Big\} \quad \text{und} \quad \Big\{\neg P\big(f(x)\big), \neg P(x)\Big\}$$

Dabei sind x und z Variablen.

Aufgabe 6 (10(=4+4+2)+6=16 Punkte)

Wir betrachten das Hornklauselprogramm auf dem Lösungsblatt.

$$M(0,0)$$
$$M\Big(S(x), S\big(S(y)\big)\Big) \leftarrow M(x,y)$$

- M ist ein zweistelliges *Relationssymbol*
- 0 eine *Konstante*
- S ist ein einstelliges *Funktionssymbol*
- x, y sind *Variablen*

(a) Wir betrachten die folgende Interpretation:

- Grundmenge sind die natürlichen Zahlen
- 0 ist die *Null*
- S ist die Addition mit 1.

(i) Lassen wir das Programm mit Zielklausel $M(2, z)$ laufen, so wird eine prädikatenlogische Formel als unerfüllbar nachgewiesen. Dabei ist $2 = S(S(0))$, z eine Variable.

Geben Sie diese Formel in KNF an, inklusive aller Quantoren.

(ii) Führen Sie die Berechnung des Programms (SLD-Resolutionsbeweis) mit Zielklausel $M(2, z)$ vor.

Geben Sie die Unifikatoren an und vergessen Sie die Variablenumbenennungen nicht!

(iii) Geben Sie das Ergebnis an, das bei Eingabe der Zielklausel $M(a, z)$, a eine natürliche Zahl, z eine Variable, in z berechnet wird.

(b) Wir betrachten eine andere Interpretation:

- Die Grundmenge ist unverändert die Menge der natürlichen Zahlen.
- M ist folgendermaßen interpretiert:
  $M(a, b)$ ist wahr genau dann, wenn $a \leq b$ ist.
- Der Rest ist unverändert.

Ihre in Teil (a)(i) angegebene Formel ist in dieser Interpretation falsch. Demonstrienen Sie das durch „Hochgehen“ in dem Beweis aus Teil (a)(ii).

- Geben Sie den Weg durch den Beweis an, der zeigt, dass die Formel auch in der angegebenen Interpretation falsch ist.
- Begründen Sie für jede Klausel auf dem Weg, warum sie zu diesem Weg gehört.