

Theoretische Informatik 1

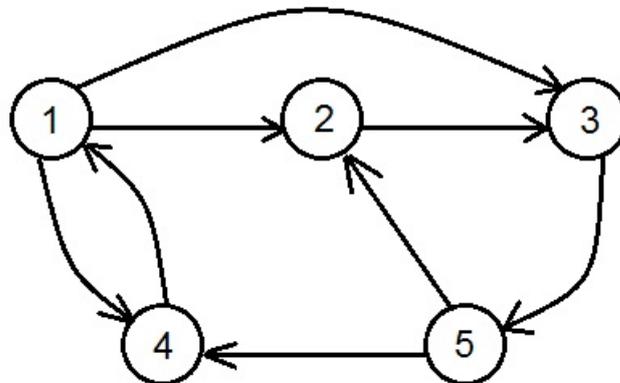
2. Übung

Abgabe: Lösen Sie die Aufgaben 1 und 2. Ihre Lösungen senden Sie bitte bis zum Donnerstag, dem 26.10.23, 7:30 Uhr, per E-Mail an knut.odermann@informatik.tu-chemnitz.de, am besten als pdf-Datei (idealerweise mit einem Textsatzsystem wie LaTeX erstellt) und gut lesbar. Nicht akzeptiert werden Scans bzw. Photos von Quellen in Formaten größer als DIN-A4. Vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren Studiengang.

Aufgabe 1 [5 Punkte] Stellen Sie den im Bild gegebenen gerichteten Graphen durch

- Adjazenzlisten und
- Adjazenzlisten in Arrays

dar.



c) Stellen Sie den gerichteten Graphen $H = (V, E)$ durch Adjazenzlisten dar, wobei H die Knotenmenge

$$V = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

und die Kantenmenge

$$E = \{ (i, j) \mid \text{die Binärfolgen } i \in V \text{ und } j \in V \text{ unterscheiden sich in genau einem Bit} \}$$

habe.

Aufgabe 2 [5 Punkte] Wir definieren

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, & n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Es seien $n \geq k \geq 1$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie rechnerisch die Gültigkeit der Gleichung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Aufgabe 3 Weisen Sie unter Verwendung von Aufgabe 2 bzw. unter Verwendung des Pascalschen Dreiecks nach, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ jede Menge mit n Elementen genauso viele Teilmengen mit ungerader Kardinalität wie Teilmengen mit gerader Kardinalität enthält.

Aufgabe 4

1. Der Binomialsatz (bzw. Binomische Lehrsatz) lautet

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}, \text{ wobei } 0^0 := 1.$$

Schreiben Sie explizit alle fünf Summanden für den Fall $n = 4$ auf.

2. Weisen Sie mithilfe des Binomialsatzes nach, dass jede endliche Menge M mit $|M| \geq 1$ genauso viele Teilmengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen wie Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen enthält.