Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2022/2023
13.12.2021

Theoretische Informatik I

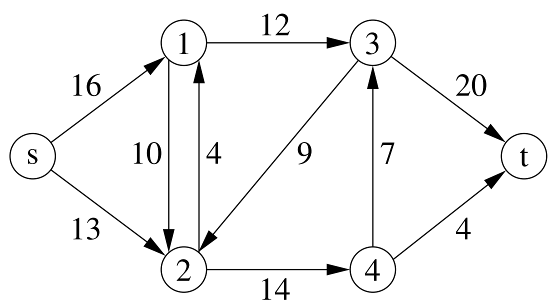
9. Übung

Abgabe: Lösen Sie bitte **entweder** die Aufgaben **1** und **2 oder** die Aufgaben **2** und **3**. Ihre Lösungen geben Sie bitte entweder

- am 03.01.2023 während der Vorlesung oder
- bis zum 03.01.2023 um 9:00 Uhr per Mail
  an `julian.pape-lange@informatik.tu-chemnitz.de`
  mit *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`

ab.

1. Aufgabe: (6P nicht kombinierbar mit Aufgabe 3)
Bestimmen Sie den *maximalen Fluss* durch das unten abgebildete Netzwerk. Nutzen Sie den Algorithmus aus der Vorlesung (*Ford-Fulkerson*) und geben Sie nach jeder Erhöhung des Flusses das *Restnetzwerk* und den *aktuellen Fluss* durch die Kanten an.



Gehen Sie davon aus, dass die Wege von s nach t in der folgenden Reihenfolge gefunden werden:

(a) $(s, 1, 3, 2, 4, t)$

(b) $(s, 2, 4, 3, t)$

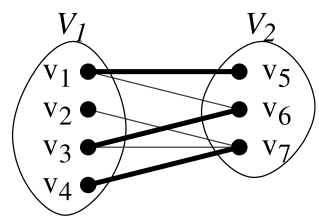
(c) $(s, 1, 3, t)$

(d) $(s, 1, 2, 3, t)$

2. Aufgabe: (4P)
Der Algorithmus von *Ford-Fulkerson* kann in eine Endlosschleife geraten, wenn das Flussnetzwerk *reelle* Kapazitäten besitzt. (Sie müssen diese Aussage nicht beweisen.)
Zeigen Sie, dass *Ford-Fulkerson* in jedem Fall terminiert, wenn nur *rationale* Kapazitäten gegeben sind.

3. Aufgabe: (6P nicht kombinierbar mit Aufgabe 1)
Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und Knoten $u, v \in V$. Weiterhin sei M eine Menge von *Wegen* vom Knoten u zum Knoten v, die jeweils *kantendisjunkt* zueinander sind.
Geben Sie einen Algorithmus an, der eine solche Menge M bestimmt. Die Größe der Menge M soll dabei *maximal* sein.
Geben Sie auch einen Algorithmus an, der eine maximale Menge *knotendisjunkter* Wege von u nach v bestimmt.

4. Aufgabe:
Ein *Matching* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge von Kanten $M \subseteq E$, so dass gilt: Die Kanten aus der Teilmenge M haben keinen gemeinsamen Knoten. Ein Matching M hat die *maximale Größe*, wenn es kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt.



In bipartiten Graphen $G = (V_1 \cup V_2, E)$, wie im obigen Bild, läßt sich ein solches *Matching maximaler Größe* mit Hilfe des Algorithmus von *Ford-Fulkerson* bestimmen.
Geben Sie eine Konstruktion für ein Flussnetzwerk an, in dem der maximale Fluss der Größe eines maximalen Matchings entspricht.

5. Aufgabe:
Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph, dessen Knotenmengen V_1 bzw. V_2 *Personen* bzw. *Jobs* darstellen. Eine Kante zwischen einer *Person* und einem *Job* symbolisiert, dass die Person die entsprechende Tätigkeit ausüben kann. Ziel ist es, soviele Jobs wie möglich abzudecken. Dabei können jeder Person bis zu *zwei* Tätigkeiten gleichzeitig zugemutet werden.
Lösen Sie das Problem mit Hilfe von Flussalgorithmen. Stellen Sie das entsprechende Netzwerk dar und erklären Sie, warum es geeignet ist.