Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2022/2023
29.11.2022

Theoretische Informatik I

7. Übung

Abgabe: Lösen Sie Aufgabe **2**. Ihre Lösungen geben Sie bitte entweder

- am 06.12.2022 während der Vorlesung oder
- bis zum 06.12.2022 um 9:00 Uhr per Mail
  an `julian.pape-lange@informatik.tu-chemnitz.de`
  mit *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`

ab.

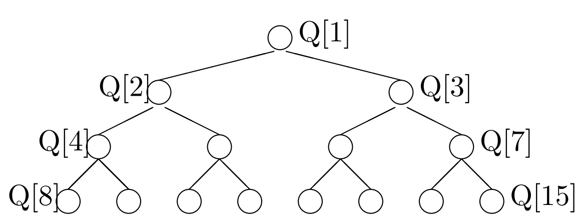
1. Aufgabe:
Beim Löschen der Wurzel im Heap muss erst der Wurzelknoten mit dem letzten Element getauscht werden und dann muss das (jetzt oben stehende) letzte Element wieder heruntersickern.
Überlegen Sie sich, warum man nicht direkt die Wurzel löschen kann und die entstehenden Leerstellen durch „Hochrücken" von Kindknoten füllen kann.

2. Aufgabe: (6+4)
Zeigen Sie, dass

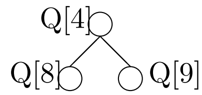
(a) der folgende Algorithmus die Laufzeit $O(n)$ hat und

(b) der durch den Algorithmus erzeugte „Heap" tatsächlich alle Bedingungen des Heaps erfüllt.

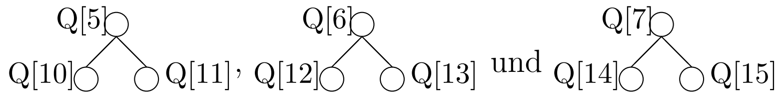
Gegeben sei ein Feld $Q[1..n]$ von Elementen. Wir wollen aus Q einen *Heap* aufbauen. Wir nehmen $n = 2^k - 1$ an und betrachten Q als Baum (z. B. $k = 4$):



Der Heap wird nun *bottom-up* aufgebaut. Das heißt, zuerst wird in dem Teil



die Heap-Eigenschaft hergestellt, indem $Q[4]$ an die richtige Stelle sickert. Genauso verfahren wir mit den Teilen

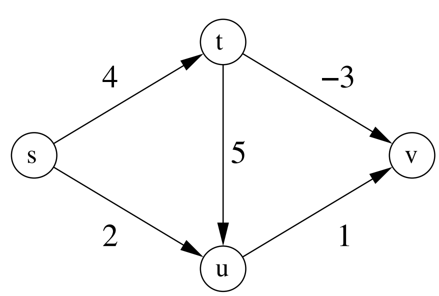


Danach lassen wir $Q[2]$ bzw. $Q[3]$ an die richtige Stelle sickern, um in den Teilbäumen

die Heapeigenschaft herzustellen. Schließlich entsteht durch Sickern von $Q[1]$ ein korrekter Heap.

Hinweis: Überprüfen Sie, wie oft ein Knoten aus Ebene i maximal sickern kann, bis er an der richtigen Stelle steht. Summieren Sie diesen Wert über alle Knoten. Die entstehende Summenformel kann auf eine geometrische Reihe zurückgeführt werden, wenn man die Ungleichung $i < 1,5^i$ benutzt.

3. Aufgabe: Wir betrachten nochmals den gerichteten Graphen $G_2 = (V, E)$ aus der 6. Übung:



Die Knoten sind wie folgt nummeriert:

$$s \mathrel{\widehat{=}} 1, \quad t \mathrel{\widehat{=}} 2, \quad u \mathrel{\widehat{=}} 3, \quad v \mathrel{\widehat{=}} 4$$

Ermitteln Sie die Länge der kürzesten Wege in G mit dem *Floyd-Warshall-Algorithmus.* Geben Sie den Inhalt der Matrix *am Anfang* und *nach jedem Durchlauf* der äußeren Schleife an.

4. Aufgabe:
Seien $u, v \notin \{1, 2, 3\}$. Geben Sie alle Wege von u nach v die nach dem dritten Durchlauf der äußeren Schleife im *Floyd-Warshall-Algorithmus* betrachtet wurden.
Sei nun i eine natürliche Zahl und seien $u, v \notin \{1, 2, \ldots, i\}$. Geben Sie eine gute untere Abschätzung für die Anzahl der Wege, von u nach v nach dem i-tem Durchlauf der äußeren Schleife an.