Prof. Dr. A. Goerdt
J. Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2022/2023
14.12.2022

Theorie der Programmiersprachen

8. Übung

1. Aufgabe: Geben Sie zu der prädikatenlogischen Formel

$$F \;=\; \forall y \forall x \Big(\big(Q(y) \wedge P(f(x)) \big) \rightarrow \big(Q(g(y)) \wedge \neg P(x) \big) \Big)$$

folgendes an:

(a) 5 kleinste Terme des Herbranduniversums

(b) 3 kleinste Formeln der Herbrandexpansion

(c) ein Herbrandmodell

(d) Stellen Sie Ihre Formeln aus (b) als Formeln mit klassischen aussagenlogischen Variablen dar.

2. Aufgabe: Geben Sie zu

$$F \;=\; \forall x \forall y \forall z \; P\big(x, f(y), g(z, x)\big)$$

ein Herbrand-Modell an.

3. Aufgabe: Zeigen Sie, dass sowohl

$$F \;=\; \forall x \big(\neg P(x) \wedge P(f(a)) \big)$$

als auch

$$G \;=\; \forall x \Bigg(\Big(\big(P(f(x)) \rightarrow P(x) \big) \wedge P(f(f(a))) \Big) \wedge \neg P(a) \Bigg)$$

unerfüllbar sind.

4. Aufgabe: Formalisieren Sie die Aussagen (a) und (b) als prädikatenlogische Formeln. Verwenden Sie die Notation $S(x,y)$ – x ist Student von y, $G(x)$ – x ist glücklich, $M(x)$ – x mag Logik.

(a) A = „Der Professor ist glücklich, wenn alle seine Studenten Logik mögen."

(b) B = „Der Professor ist glücklich, wenn er keine Studenten hat."

Zeigen Sie, dass (b) eine Folgerung von (a) ist. Formulieren Sie dazu $A \wedge \neg B$ in Klauselform.

Gegeben seien zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit:

$$\begin{array}{rcl} U_{\mathcal{A}} & = & \{p, s_1, \ldots, s_n\} \\ I_{\mathcal{A}}(G) & = & \{x \mid x \text{ ist glücklich}\} \\ I_{\mathcal{A}}(M) & = & \{x \mid x \text{ mag Logik}\} \\ I_{\mathcal{A}}(S) & = & \{(x,y) \mid x \text{ ist Student von } y\} \\ I_{\mathcal{A}}(p) & = & \{p\} \\ I_{\mathcal{A}}(q) & = & \{s_1\}, \quad q \text{ Skolemkonstante} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} U_{\mathcal{B}} & = & \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} \\ I_{\mathcal{B}}(G) & = & \{x \mid x = 1\} \\ I_{\mathcal{B}}(M) & = & \{x \mid x > 1\} \\ I_{\mathcal{B}}(S) & = & \{(x,y) \mid x > y\} \\ I_{\mathcal{B}}(p) & = & \{1\} \\ I_{\mathcal{B}}(q) & = & \{2\} \end{array}$$

Zeigen Sie durch „Hochgehen" in Ihren Beweisen, dass beide Strukturen kein Modell für die entsprechende Formel sind.

5. Aufgabe: Drücken Sie folgende Tatsachen als prädikatenlogische Formeln aus:

A = „Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können."
B = „Grüne Drachen können fliegen."
C = „Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist."

Zeigen Sie durch, dass aus A, B und C folgt, dass *alle grünen Drachen glücklich sind.*

6. Aufgabe: Geben Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen von

$$\{P(f(x)), \neg Q(z), P(z)\} \quad \text{und} \quad \{\neg P(x), R(g(x), a)\}$$

an. (x, y, z sind Variablen, a ist eine Konstante)