Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2022/2023
23.11.2022

# Theorie der Programmiersprachen

## 5. Übung

**1. Aufgabe:** Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von Formel $F$ alle

- Teilformeln,
- Terme,
- atomaren Formeln,
- alle frei vorkommenden Variablen, (Welche Variablen sind wo gebunden?)
- sowie die Matrix.

$$F = \Big(\Big(\exists x_3 P_1^3\big(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1)\big)\Big) \lor \Big(\forall x_2 P_2^1\big(f_3^2(x_2, x_1)\big)\Big)\Big) \lor \Big(\exists x_2 \neg P_3^2\big(x_3, f_4^1(x_2)\big)\Big)$$

**2. Aufgabe:** Gegeben sei die Formel

$$F = \forall x \exists y P(x, y, f(z)).$$

Geben Sie eine Struktur $\mathcal{A}$ an, die Modell für $F$ ist und eine Struktur $\mathcal{B}$, die kein Modell für $F$ ist.

**3. Aufgabe:** Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die folgende Formel?

$$F = \exists x \exists y \exists z \Big(P(x, y) \land P(z, y) \land P(x, z) \land \neg P(z, x)\Big)$$

(a) Grundmenge $U = \mathbb{N}$
$P$ wird interpretiert als $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$
(Also ist $P(m, n)$ wahr, genau dann wenn $m < n$)

(b) $U = \mathbb{N},\ P = \{(m, m + 1) \mid m \in \mathbb{N}\}$

(c) $U = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ), $P = \{(A, B) \mid A, B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

**4. Aufgabe:** Zeigen Sie, dass $\big(\forall x F \vee \forall x G\big)$ nicht äquivalent zu $\forall x\big(F \vee G\big)$ ist.

**5. Aufgabe:** Beweisen Sie, dass $\forall x \exists y P(x, y)$ eine Folgerung von $\exists y \forall x P(x, y)$ ist, aber nicht umgekehrt.

**6. Aufgabe:**
Sei $F$ eine erfüllbare Formel und sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $F$ mit $|U_{\mathcal{A}}| = n$.
Zeigen Sie, dass es ein Modell $\mathcal{B}$ für $F$ gibt, sodass $|U_{\mathcal{B}}| = n + 1$.

**7. Aufgabe:** In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol „=" zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Formulieren Sie prädikatenlogische Aussagen mit Identität, in denen das zweistellige Prädikatsymbol $P$ bzw. das einstellige Funktionssymbol $f$ vorkommen, die besagen:

(a) $P$ ist eine antisymmetrische Relation,

(b) $f$ ist eine injektive / surjektive / bijektive Funktion.

**8. Aufgabe:**
Geben Sie eine eine erfüllbare Formel $F$ mit Identität an, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ von $F$ gilt: $|U_{\mathcal{A}}| \leq 2$.