Prof. Dr. A. Goerdt
Julian Pape-Lange

TU Chemnitz
Wintersemester 2021/2022
07.02.2022

Theoretische Informatik I

13. Übung

Abgabe: Lösen Sie die Aufgabe **1**. Ihre Lösungen geben Sie bitte entweder

- bis zum 02.02.2022 um 13:00 Uhr per Mail
  an `julian.pape-lange@informatik.tu-chemnitz.de`
  mit *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben` oder
- bis zum 02.02.2022 um 13:00 Uhr im Briefkasten der Professur Theoretische Informatik (vor Raum A10.266.4)

ab.

1. Aufgabe: ((8+2)P)
Seien $u, v \in V$ Knoten mit $u, v \notin \{1, 2, 3\}$.

- Welche Wege werden in $\mathrm{KW}(u, v, \{1, 2, 3\})$ betrachtet?
- In welcher Übungsaufgabe haben Sie diese 16 Wege bereits gesehen?

2. Aufgabe: Ein *Hamiltonkreis* in einem ungerichteten Graphen ist ein geschlossener Weg, in dem jeder Knoten des Graphen genau einmal vorkommt.
Finden Sie einen Algorithmus, der entscheidet, ob ein gegebener Graph einen Hamiltonkreis hat.

3. Aufgabe: Ein *Eulerscher Kreis* in einem ungerichteten Graphen ist ein geschlossener Weg, in dem jede Kante des Graphen genau einmal vorkommt. Ein ungerichteter Graph G hat genau dann einen Eulerkreis, wenn G zusammenhängend ist und alle Knoten einen geraden Grad haben.

(a) Konstruieren Sie aus dem Beweis dieser Aussage einen Algorithmus, der zu einem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ einen Eulerkreis ausgibt, falls ein solcher in G existiert.

(b) Um die Laufzeit $O(|V|+|E|)$ zu erreichen, muß der Algorithmus eine gefundene Kante in $O(1)$ aus dem Graphen löschen können. Warum ist dies mit der herkömmlichen Adjazenzlistendarstellung kaum möglich?

(c) Entwickeln Sie die Adjazenzliste zu einer Datenstruktur weiter, die es ermöglicht, den Algorithmus mit Laufzeit $O(|V| + |E|)$ zu implementieren.

(d) Geben Sie ein Verfahren an, wie die gegebene Adjazenzliste des Graphen in Ihre Datenstruktur umgewandelt werden kann. Beachten Sie, dass dafür nur Zeit $O(|V| + |E|)$ zur Verfügung steht.

4. Aufgabe: Geben Sie einen Algorithmus zum Finden der längsten einfachen Wege an.

5. Aufgabe: Sortieren Sie die Zahlen 80, 57, 15, 13, 28, 66, 62, 8 mit Mergesort.

6. Aufgabe:
Multiplizieren Sie die 2 Binärzahlen 1100 und 1011 sowohl mit Schulmethode als auch mit dem Karazuba-Algorithmus aus der Vorlesung.
Zählen Sie dabei die benötigten Bit-Multiplikationen und erklären Sie das Laufzeitverhalten der beiden Algorithmen.
Zeigen Sie außerdem, dass die Division mit der Schulmethode ebenfalls in $\mathcal{O}(n^2)$ durchgeführt werden kann.
Hinweis: Der Karazuba-Algorithmus kommt in der Vorlesung erst am 01.02.2022 dran.

7. Aufgabe: Erklären Sie, warum man in einem sortierten Array für jeden Wert x in logarithmischer Zeit entscheiden kann, ob x im Array vorkommt.

8. Aufgabe: Übersetzen Sie folgende aussagenlogische Formel in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in 3-KNF.

$$F = (X \vee \neg Y) \leftrightarrow (Y \wedge Z)$$

9. Aufgabe: Wir wenden den Davis-Putnam-Algorithmus aus der Vorlesung auf die Formel

$$F = (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$$

an.

10. Aufgabe:
Die Formeln

$$F = (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_3 \vee A_4) \wedge (\neg A_4 \vee A_5) \wedge (\neg A_4 \vee \neg A_5)$$

und

$$G = (\neg A_1 \vee \neg A_2) \wedge (A_3 \vee A_4) \wedge (\neg A_3 \vee \neg A_4) \wedge (\neg A_3 \vee A_4) \wedge (A_3 \vee \neg A_4)$$

sind gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Polynomialzeitalgorithmus für 2-KNF, ob die Formeln erfüllbar ist.