Prof. Dr. A. Goerdt
J. Pape-Lange

TU CHEMNITZ
Wintersemester 2021/2022
15.12.2021

Theorie der Programmiersprachen

9. Übung

1. Aufgabe: Peter behauptet, er habe den Endlichkeitssatz widerlegt. Er erklärt, dass die Menge $\mathbf{M} = \{F_i | i \in \mathbb{N}\}$ mit

$$F_i := (\neg A_i) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{\infty} A_j \right)$$

einen Widerspruch zum Endlichkeitssatz bilde, da

- $\mathbf{M}$ unendlich viele Formeln enthalte.
- Jede endliche Teilmenge von $\mathbf{M}$ erfüllbar sei.
- Nicht alle Formeln aus $\mathbf{M}$ gleichzeitig erfüllbar seien.

Welche seiner Aussagen stimmt nicht?

2. Aufgabe: Wir beziehen uns auf die Beobachtung vom Anfang von Kapitel 2.3, vgl.

$$F \;=\; \forall x P(x, f(x)) \wedge \forall y \neg P(y,y) \wedge \forall u \forall v \forall w \Big(\big(P(u,v) \wedge P(v,w)\big) \to P(u,w) \Big)$$

$$U_{\mathcal{A}} \;=\; \mathbb{N}_0,\; P^{\mathcal{A}} \;=\; \{(m,n) \mid m < n\},\; f^{\mathcal{A}}(n) \;=\; n+1$$

(a) Geben Sie die Herbrandstruktur zu der zugehörigen Struktur $\mathcal{A}$ an, wie sie sich aus dem Beweis der Vorlesung ergibt.

(b) Sei F eine quantorenfreie Formel mit den Variablen $x_1, \ldots, x_k$.

Zeigen Sie: für alle $t_1, \ldots, t_k \in D(F)$ hat $F[x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k]$ in dem Modell aus (a) denselben Wahrheitswert wie F an der Stelle $\mathcal{A}[x_1/t_1^{\mathcal{A}}], \ldots, \mathcal{A}[x_k/t_k^{\mathcal{A}}]$

3. Aufgabe: Geben Sie zu der prädikatenlogischen Formel

$$F \;=\; \forall y \forall x \Big(\big(Q(y) \wedge P(f(x))\big) \rightarrow \big(Q(g(y)) \wedge \neg P(x)\big) \Big)$$

folgendes an:

(a) 5 kleinste Terme des Herbranduniversums

(b) 3 kleinste Formeln der Herbrandexpansion

(c) ein Herbrandmodell

(d) Stellen Sie Ihre Formeln aus (b) als Formeln mit klassischen aussagenlogischen Variablen dar.

4. Aufgabe: Formalisieren Sie die Aussagen (a) und (b) als prädikatenlogische Formeln. Verwenden Sie die Notation $S(x, y)$ – x ist Student von y, $G(x)$ – x ist glücklich, $M(x)$ – x mag Logik.

(a) A = „Der Professor ist glücklich, wenn alle seine Studenten Logik mögen.“

(b) B = „Der Professor ist glücklich, wenn er keine Studenten hat.“

Zeigen Sie, dass (b) eine Folgerung von (a) ist. Formulieren Sie dazu $A \wedge \neg B$ in Klauselform.