

Theorie der Programmiersprachen

6. Übung

1. Aufgabe: Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von Formel F alle

- Teilformeln,
- Terme,
- atomaren Formeln,
- sowie alle frei vorkommenden Variablen, (Welche Variablen sind wo gebunden?).

$$F = \left(\left(\exists x_3 P_1^3(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1)) \right) \vee \left(\forall x_2 P_2^1(f_3^2(x_2, x_1)) \right) \right) \vee \left(\exists x_2 \neg P_3^2(x_3, f_4^1(x_2)) \right)$$

2. Aufgabe: Gegeben sei die Formel

$$F = \forall x \exists y P(x, y, f(z)).$$

Geben Sie eine Interpretation \mathcal{A} an, die Modell für F ist und eine Interpretation \mathcal{B} , die kein Modell für F ist.

3. Aufgabe: Welche der folgenden Interpretationen sind Modelle für die folgende Formel?

$$F = \exists x \exists y \exists z \left(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x) \right)$$

- (a) Grundmenge $U = \mathbb{N}$
 P wird interpretiert als $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$
(Also ist $P(m, n)$ wahr, genau dann wenn $m < n$)
- (b) $U = \mathbb{N}$, $P = \{(m, m + 1) \mid m \in \mathbb{N}\}$
- (c) $U = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (die Potenzmenge von \mathbb{N}), $P = \{(A, B) \mid A, B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

4. Aufgabe: Zeigen Sie, dass $(\exists xF \wedge \exists xG)$ nicht äquivalent zu $\exists x(F \wedge G)$ ist.

5. Aufgabe: Beweisen Sie, dass $\forall x\exists yP(x, y)$ eine Folgerung von $\exists y\forall xP(x, y)$ ist, aber nicht umgekehrt.

6. Aufgabe:

Sei F eine erfüllbare Formel und sei \mathcal{A} ein Modell für F mit $|U_{\mathcal{A}}| = n$.

Zeigen Sie, dass es ein Modell \mathcal{B} für F gibt, sodass $|U_{\mathcal{B}}| = n + 1$.

7. Aufgabe: In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol „ $=$ “ zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Formulieren Sie prädikatenlogische Aussagen mit Identität, in denen das zweistellige Prädikatsymbol P bzw. das einstellige Funktionssymbol f vorkommen, die besagen:

(a) P ist eine antisymmetrische Relation,

(b) f ist eine injektive / surjektive / bijektive Funktion.

8. Aufgabe: Geben Sie eine erfüllbare prädikatenlogische Aussage F mit Identität an, so dass für jedes Modell \mathcal{A} von F gilt $|U_{\mathcal{A}}| \leq 2$.