

Theorie der Programmiersprachen

7. Übung

1. Aufgabe: In der *monadischen* Prädikatenlogik dürfen die Formeln keine Funktionssymbole enthalten und alle Prädikate müssen einstellig (monadisch) sein.

Man zeige: Falls eine Aussage F der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatensymbol P_1 erfüllbar ist, dann gibt es bereits ein Modell für F der Mächtigkeit 2. Hieraus folgere man, dass das Erfüllbarkeits- (und Gültigkeits-) problem für Formeln der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatsymbol entscheidbar ist!

Hinweis: Man zeige, dass der Grundbereich eines jeden Modells \mathcal{A} für F in 2 Äquivalenzklassen unterteilt werden kann. Die Äquivalenz zweier Elemente $u, v \in U_{\mathcal{A}}$ ergibt sich aus ihrem gleichartigen Verhalten bzgl. $P_1^{\mathcal{A}}$. Sodann kann man ein neues Modell \mathcal{B} für F definieren, wobei die Elemente von $U_{\mathcal{B}}$ gerade diese Äquivalenzklassen sind.

2. Aufgabe: Wir beziehen uns auf die Beobachtung vom Anfang von Kapitel 2.3, vgl.

$$F = \forall x P(x, f(x)) \wedge \forall y \neg P(y, y) \wedge \forall u \forall v \forall w \left((P(u, v) \wedge P(v, w)) \rightarrow P(u, w) \right)$$

$$U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}_0, P^{\mathcal{A}} = \{(m, n) \mid m < n\}, f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$$

(a) Geben Sie die Herbrandstruktur zu der zugehörigen Struktur \mathcal{A} an, wie sie sich aus dem Beweis der Vorlesung ergibt.

(b) Sei F eine quantorenfreie Formel mit den Variablen x_1, \dots, x_k .

Zeigen Sie: für alle $t_1, \dots, t_k \in D(F)$ hat $F[x_1/t_1, \dots, x_k/t_k]$ in dem Modell aus (a) denselben Wahrheitswert wie F an der Stelle $\mathcal{A}[x_1/t_1^{\mathcal{A}}], \dots, \mathcal{A}[x_k/t_k^{\mathcal{A}}]$

3. Aufgabe: Gegeben sei die Formel

$$F = \exists x: a < x < b \quad (x \in \mathbb{Q})$$

Geben Sie dazu die Skolemfunktion und ein Herbrandmodell an.

4. Aufgabe: Geben Sie zu der Formel

$$F = \forall x \forall y Q(c, f(x), h(y, b))$$

mindestens 10 Elemente des Herbranduniversums an.

5. Aufgabe: Geben Sie zu

$$F = \forall x \forall y \forall z P(x, f(y), g(z, x))$$

ein Herbrand-Modell an.

6. Aufgabe: Geben Sie zu der prädikatenlogischen Formel

$$F = \forall y \forall x \left((Q(y) \wedge P(f(x))) \rightarrow (Q(g(y)) \wedge \neg P(x)) \right)$$

folgendes an:

- (a) 5 kleinste Terme des Herbranduniversums
- (b) 3 kleinste Formeln der Herbrandexpansion
- (c) ein Herbrandmodell
- (d) Stellen Sie Ihre Formeln aus (b) als Formeln mit klassischen aussagenlogischen Variablen dar.