

# Theorie der Programmiersprachen

## 5. Übung

**1. Aufgabe:** Geben Sie zu

$$F = \forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge \forall y (Q(x, y) \vee R(x))$$

die äquivalente, bereinigte Form an.

**2. Aufgabe:** Formulieren Sie einen Algorithmus zur Erstellung von äquivalenten Formeln in bereinigter Pränexform.

**3. Aufgabe:** Geben Sie zu

$$F = \left( \forall x \exists y P(x, g(y, f(x))) \vee \neg Q(z) \right) \vee \neg \forall x R(x, y)$$

die äquivalente, bereinigte Pränexform an.

**4. Aufgabe:** Wiederholen Sie den Ablauf des Algorithmus' zur Erstellung der *Skolemform*. Geben Sie zu

$$F = \forall x \exists y \forall z \exists w (\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y))$$

die Skolemform unter Nutzung des Algorithmus' aus der Vorlesung an.

**5. Aufgabe:** Wir betrachten die folgende Formel.

$$F = \forall x \exists y \forall z \exists u (Q(x, y) \wedge Q(u, f(y, z)))$$

(a) Geben Sie dazu die Skolemform unter Nutzung des Algorithmus' aus der Vorlesung an.

(b) Betrachten wir nun die folgende Struktur  $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$  mit

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{A}} &= \mathbb{Q} \\ I_{\mathcal{A}}(Q) &= Q^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x, y \in U_{\mathcal{A}}, x < y\} \\ I_{\mathcal{A}}(f) &= f^{\mathcal{A}} = \text{Additionsfunktion auf } U_{\mathcal{A}} \quad (f^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y) \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass  $\mathcal{A}$  ein Modell von  $F$  ist. Geben Sie für diesen Fall geeignete Skolemfunktionen an. Beachten Sie die Abhängigkeiten der Skolemfunktionen voneinander!

(c) Geben Sie für die Skolemform von  $F$  ein Modell  $\mathcal{A}$  mit  $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$  an und zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}$  auch ein Modell von  $F$  ist.

**6. Aufgabe:** Geben Sie zu

$$F = \forall z \exists y (P(x, g(y), z) \vee \neg \forall x Q(x)) \wedge \neg \forall z \exists x \neg R(f(x, z), z)$$

die bereinigte Form, die Pränexform und die Skolemform an.

**7. Aufgabe:** Geben Sie zu

$$F = \neg \exists x (P(x, z) \vee \forall y Q(x, f(y))) \vee \forall y P(g(z, y), z)$$

die bereinigte Form, die Pränexform, die Skolemform und die Darstellung als Klauselmengen an.