

Theorie der Programmiersprachen

4. Übung

1. Aufgabe: Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von folgenden Formel alle

- Teilformeln,
- Terme,
- atomaren Formeln,
- alle frei vorkommenden Variablen, (Welche Variablen sind wo gebunden?)
- sowie die Matrix.

$$F_1 = \left(\exists x_3 P_1^3(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1)) \right) \vee \left(\forall x_2 P_2^1(f_3^2(x_2, x_1)) \right) \vee \left(\exists x_2 \neg P_3^2(x_3, f_4^1(x_2)) \right)$$

2. Aufgabe: Gegeben sei die Formel

$$F = \forall x \exists y P(x, y, f(z)).$$

Man gebe eine Struktur \mathcal{A} an, die Modell für F ist und eine Struktur \mathcal{B} , die kein Modell für F ist.

3. Aufgabe: Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die folgende Formel?

$$F = \exists x \exists y \exists z \left(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x) \right)$$

- (a) $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $P^{\mathcal{A}} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$
- (b) $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $P^{\mathcal{A}} = \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}$
- (c) $U_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$, $P^{\mathcal{A}} = \{(A, B) \mid A, B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

4. Aufgabe: In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol „ $=$ “ zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Wie muss die *Syntax* und *Semantik* der Prädikatenlogik erweitert werden, um die Prädikatenlogik mit Identität zu erhalten?

5. Aufgabe: Man gebe eine erfüllbare prädikatenlogische Aussage F mit Identität an, so dass für jedes Modell \mathcal{A} von F gilt $|U_{\mathcal{A}}| \leq 2$.

6. Aufgabe: Man formuliere prädikatenlogische Aussagen mit Identität, in denen das zweistellige Prädikatsymbol P bzw. das einstellige Funktionssymbol f vorkommen, die besagen:

- (a) P ist eine antisymmetrische Relation,
- (b) f ist eine injektive / surjektive / bijektive Funktion.

7. Aufgabe: Zeigen Sie, dass $(\forall xF \vee \forall xG)$ nicht äquivalent zu $\forall x(F \vee G)$ ist.

8. Aufgabe: Man zeige, dass

$$F = (\exists xP(x) \rightarrow P(y)) \quad \text{äquivalent zu} \quad G = \forall x(P(x) \rightarrow P(y)) \quad \text{ist.}$$

9. Aufgabe: Man beweise, dass $\forall x\exists yP(x, y)$ eine Folgerung von $\exists y\forall xP(x, y)$ ist, aber nicht umgekehrt.