Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2015/2016
6.10.2015

Theorie der Programmiersprachen

4. Übung

1. Aufgabe: Geben Sie für

$$F \;=\; \big\{\{A, B, \neg C\},\ \{\neg A\},\ \{A, B, C\},\ \{A, \neg B\}\big\}$$

die Menge $Res^*(F)$ an und leiten Sie eine Herleitung der *leeren Klausel* ab.

2. Aufgabe: Sei F eine Klauselmenge mit m Klauseln, in der die atomaren Formeln $A_1, \ldots, A_n$ vorkommen. Wie groß ist $|Res^*(F)|$ maximal?

3. Aufgabe: Man zeige mittels der Resolutionsmethode:

(a) $H = A \wedge B \wedge C$ ist eine Folgerung aus der Formelmenge

$$F \;=\; \big\{\{\neg A, B\},\ \{\neg B, C\},\ \{A, \neg C\},\ \{A, B, C\}\big\}.$$

(b) Die Formel

$$G \;=\; (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B$$

ist eine Tautologie.

4. Aufgabe: Stellen Sie für

$$F \;=\; \big\{\{B, \neg C\},\ \{\neg A\},\ \{A, C\},\ \{A, \neg B\},\ \{B, C\}\big\}$$

einen Backtracking-Baum auf und konstruieren Sie den zugehörigen Resolutionsbeweis!

5. Aufgabe: Beweisen Sie mithilfe der Resolutionsmethode, dass man die Unerfüllbarkeit einer Formel in 2-KNF in polynomieller Zeit zeigen kann.

6. Aufgabe: Zeigen Sie, dass folgende Einschränkung des Resolutionskalküls vollständig ist:

> Es darf nur dann ein Resolvent aus den Klauseln K_1 und K_2 gebildet werden, wenn der Resolvent keine Tautologie darstellt.

7. Aufgabe: Wir betrachten den folgenden Satz:

> Gegeben sei eine Funktion $f : A \to B$, wobei $|A| = n + 1$ und $|B| = n$ gilt. Also z.B. $A = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ und $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es Elemente $i_1, i_2 \in A, i_1 \neq i_2$ und ein $j \in B$ mit der Eigenschaft $j = f(i_1) = f(i_2)$.
>
> Mit anderen Worten: Mindestens zwei verschiedenen Elementen aus A muss dasselbe Element aus B zugeordnet werden.

Als aussagenlogische Formel kann dieser Satz folgendermaßen formuliert werden. Wir benutzen $(n + 1) \cdot n$ Variablen $x_{i,j}, i \in A, j \in B$ mit der gedachten Bedeutung

$$\mathcal{A}(x_{i,j}) = 1 \iff i \text{ wird auf } j \text{ begebildet.}$$

Dann ist $\left(\bigwedge_{i\in A} \bigvee_{i\in B} x_{i,j}\right) \to \left(\bigvee_{k\in B} \bigvee_{i,j\in A, i\neq j} (x_{i,k} \wedge x_{j,k})\right)$ oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
\Big((x_{1,1} \vee x_{1,2} \vee \ldots \vee x_{1,n}) \wedge \\
(x_{2,1} \vee x_{2,2} \vee \ldots \vee x_{2,n}) \wedge \\
\ldots \wedge \\
(x_{n+1,1} \vee x_{n+1,2} \vee \ldots \vee x_{n+1,n})\Big) \quad \to \quad & \Big((x_{1,1} \wedge x_{2,1}) \vee \ldots \vee (x_{1,1} \wedge x_{n+1,1}) \vee \\
& (x_{2,1} \wedge x_{3,1}) \vee \ldots \vee (x_{2,1} \wedge x_{n+1,1}) \vee \\
& \ldots \vee (x_{n,1} \wedge x_{n+1,1}) \vee \\
& (x_{1,n} \wedge x_{2,n}) \vee \ldots \vee (x_{1,n} \wedge x_{n+1,n}) \vee \\
& (x_{2,n} \wedge x_{3,n}) \vee \ldots \vee (x_{2,n} \wedge x_{n+1,n}) \vee \\
& \ldots \vee (x_{n,n} \wedge x_{n+1,n})\Big)
\end{aligned}$$

eine Tautologie. Die Negation dieser Formel läßt sich leicht als KNF schreiben und muss widersprüchlich sein.

(a) Leiten Sie den Resolutionsbeweis für $n = 3$ her. (Gehen Sie dazu spaltenweise vor.)

(b) Machen Sie sich klar, dass am Ende des Beweises alle $n + 1$ Klauseln der Art

$$\begin{gathered}
x_{1,n} \vee x_{2,n} \vee \ldots \vee x_{n,n} \\
x_{1,n} \vee x_{2,n} \vee \ldots \vee x_{n-1,n} \vee x_{n+1,n} \\
\vdots \\
x_{2,n} \vee x_{3,n} \vee \ldots \vee x_{n+1,n}
\end{gathered}$$

benötigt werden. Wieviele Resolutionsschritte werden im Allgemeinen benötigt?