

Theorie der Programmiersprachen

3. Übung

1. Aufgabe: Wir betrachten eine *erfüllbare, unendliche* Formelmenge \mathbf{M} . In keiner der Formeln $F \in \mathbf{M}$ kommt die atomare Formel A_{42} vor. Wir können daher annehmen, dass keines der Modelle \mathcal{A}_n aus der Konstruktion im Beweis des *Endlichkeitssatzes* auf A_{42} definiert ist.

Welcher Wert wird A_{42} dann in der Konstruktion im Beweis zugeordnet?

2. Aufgabe: Man beweise, dass $\mathbf{M} = \{F_1, F_2, F_3, \dots\}$ erfüllbar ist, genau dann, wenn für unendlich viele n die Formel

$$G = \bigwedge_{i=1}^n F_i$$

erfüllbar ist.

3. Aufgabe: Sei L eine *beliebige unendliche* Menge von natürlichen Zahlen, dargestellt als Binärzahlen. Beweisen Sie, dass es eine unendliche Folge w_1, w_2, w_3, \dots von *paarweise verschiedenen* Binärzahlen gibt, so dass w_i Anfangsstück von w_{i+1} und von mindestens einem Element aus L ist. ($i = 1, 2, 3, \dots$)

4. Aufgabe: Eine Formelmenge \mathbf{M}_0 heißt *Axiomensystem* für eine Formelmenge \mathbf{M} , falls

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist Modell für } \mathbf{M}_0\} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist Modell für } \mathbf{M}\}.$$

\mathbf{M} heißt *endlich axiomatisierbar*, falls es ein endliches Axiomensystem für \mathbf{M} gibt.

Es sei $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$ ein Axiomensystem für eine gewisse Menge \mathbf{M} , wobei für $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt:

$$\models (F_{n+1} \rightarrow F_n) \quad \text{und} \quad \not\models (F_n \rightarrow F_{n+1})$$

Man zeige: \mathbf{M} ist nicht endlich axiomatisierbar. Zeigen Sie dafür zunächst: Die Menge $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$ enthält unendlich viele Atomformeln.

Sei \mathbf{M} die Menge der *Tautologien* bzw. *widersprüchlichen Formeln*. Ist \mathbf{M} endlich axiomatisierbar?