Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU CHEMNITZ
Wintersemester 2014/2015
17.10.2014

Theorie der Programmiersprachen

8. Übung

1. Aufgabe: In der *monadischen* Prädikatenlogik dürfen die Formeln keine Funktionssymbole enthalten und alle Prädikate müssen einstellig (monadisch) sein.
Man zeige: Falls eine *Aussage* F der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatensymbol P_1 erfüllbar ist, dann gibt es bereits ein Modell für F der Mächtigkeit 2. Hieraus folgere man, dass das Erfüllbarkeits- (und Gültigkeits-) problem für Formeln der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatsymbol entscheidbar ist!
Hinweis: Man zeige, dass der Grundbereich eines jeden Modells $\mathcal{A}$ für F in 2 Äquivalenzklassen unterteilt werden kann. Die Äquivalenz zweier Elemente $u, v \in U_\mathcal{A}$ ergibt sich aus ihrem gleichartigen Verhalten bzgl. $P_1^\mathcal{A}$. Sodann kann man ein neues Modell $\mathcal{B}$ für F definieren, wobei die Elemente von $U_\mathcal{B}$ gerade diese Äquivalenzklassen sind.

2. Aufgabe: Wir beziehen uns auf die Beobachtung vom Anfang von Kapitel 2.3, vgl.

$$F = (\forall x P(x, f(x))) \wedge (\forall y \neg P(y, y)) \wedge (\forall u \forall v \forall w ((P(u, v) \wedge P(v, w)) \rightarrow P(u, w))$$

$$U_\mathcal{A} = \mathbb{N}_0, P^\mathcal{A} = \{(m, n) \colon m < n\}, f^\mathcal{A}(n) = n + 1$$

(a) Geben Sie die Herbrand-Struktur zu der zugehörigen Struktur $\mathcal{A}$ an, wie sie sich aus dem Beweis der Vorlesung ergibt.

(b) Sei F eine quantorenfreie Formel mit den Variablen $x_1, \ldots, x_k$.
Zeigen Sie: für alle $t_1, \ldots, t_k \in D(F)$ hat $F[x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k]$ in dem Modell aus (a) denselben Wahrheitswert wie F an der Stelle $\mathcal{A}[x_1/t_1^\mathcal{A}], \ldots, \mathcal{A}[x_k/t_k^\mathcal{A}]$

3. Aufgabe: Gegeben sei die Formel

$$F = \exists x \colon a < x < b \qquad (x \in \mathbb{Q})$$

Geben Sie dazu die Skolemfunktion und ein Herbrand-Modell an.

4. Aufgabe: Geben Sie zu der Formel

$$F = \forall x \forall y Q(c, f(x), h(y, b))$$

mindestens 10 Elemente des Herbrand-Universums an.

5. Aufgabe: Geben Sie zu

$$F = \forall x \forall y \forall z P(x, f(y), g(z, x))$$

ein Herbrand-Modell an.

6. Aufgabe: Geben Sie zu der prädikatenlogische Formel

$$F = \forall y \forall x((Q(y) \wedge P(f(x))) \rightarrow (Q(g(y)) \wedge \neg P(x)))$$

Folgendes an:

(a) 5 kleinste Terme des Herbrand-Universums

(b) 3 kleinste Formeln der Herbrand-Expansion

(c) ein Herbrand-Modell

(d) Stellen Sie Ihre Formeln aus (b) als Formeln mit klassischen aussagenlogischen Variablen dar.

7. Aufgabe: Man zeige, dass das Post'sche Korrespondenzproblem semi-entscheidbar ist.