

# Theorie der Programmiersprachen

## 5. Übung

**1. Aufgabe:** Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von folgenden Formeln alle

- Teilformeln
- Terme
- atomaren Formeln
- alle frei vorkommenden Variablen (welche Variablen sind wo gebunden?)
- die Matrix.

$$F_1 = (\exists x_3 P_1^3(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1))) \vee (\forall x_2 P_2^1(f_3^2(x_2, x_1))) \vee (\exists x_2 \neg P_3^2(x_3, f_4^1(x_2)))$$

**2. Aufgabe:** Gegeben sei die Formel

$$F = \forall x \exists y P(x, y, f(z)).$$

Man gebe eine Struktur  $\mathcal{A}$  an, die Modell für  $F$  ist und eine Struktur  $\mathcal{B}$ , die kein Modell für  $F$  ist.

**3. Aufgabe:** Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die Formel

$$F = \exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x))?$$

- (a)  $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$
- (b)  $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} = \{(m, m + 1) : m \in \mathbb{N}\}$
- (c)  $U_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}^{\mathbb{N}}, P^{\mathcal{A}} = \{(A, B) : A, B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

**4. Aufgabe:** In der *Prädikatenlogik mit Identität* ist auch das Symbol  $=$  zugelassen, das Gleichheit zwischen Termen bedeuten soll. Wie muss die Syntax und Semantik der Prädikatenlogik erweitert werden, um die Prädikatenlogik mit Identität zu erhalten?

**5. Aufgabe:** Man gebe eine erfüllbare prädikatenlogische Aussage  $F$  mit Identität an, so dass für jedes Modell  $\mathcal{A}$  von  $F$  gilt  $|U_{\mathcal{A}}| \leq 2$ .

**6. Aufgabe:** Man formuliere prädikatenlogische Aussagen mit Identität, in denen das zweistellige Prädikatsymbol  $P$  bzw. das einstellige Funktionssymbol  $f$  vorkommen, die besagen:

- (a)  $P$  ist eine antisymmetrische Relation,
- (b)  $f$  ist eine injektive / surjektive / bijektive Funktion.

**7. Aufgabe:** Zeigen Sie, dass  $(\forall xF \vee \forall xG)$  nicht äquivalent zu  $\forall x(F \vee G)$  ist.

**8. Aufgabe:** Man zeige, dass  $F = (\exists xP(x) \rightarrow P(y))$  äquivalent ist zu  $G = \forall x (P(x) \rightarrow P(y))$ .

**9. Aufgabe:** Man beweise, dass  $\forall x\exists yP(x, y)$  eine Folgerung von  $\exists y\forall xP(x, y)$  ist, aber nicht umgekehrt.