Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2014/2015
17.10.2014

Theorie der Programmiersprachen

3. Übung

1. Aufgabe: Wir betrachten eine *erfüllbare* unendliche Formelmenge $\mathbf{M}$. In keiner der Formeln $F \in \mathbf{M}$ kommt die atomare Formel A_{42} vor. Wir können daher annehmen, dass keines der Modelle $\mathcal{A}_n$ aus der Konstruktion im Beweis des *Endlichkeitssatzes* auf A_{42} definiert ist.
Welcher Wert wird A_{42} dann in der Konstruktion im Beweis zugeordnet?

2. Aufgabe: Man beweise, dass $\mathbf{M} = \{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$ erfüllbar ist, genau dann, wenn für unendlich viele n $(\bigwedge_{i=1}^n F_i)$ erfüllbar ist.

3. Aufgabe: Sei L eine *beliebige unendliche* Menge von natürlichen Zahlen, dargestellt als Binärzahlen. Beweisen Sie, dass es eine unendliche Folge $w_1, w_2, w_3, \ldots$ von paarweise verschiedenen Binärzahlen gibt, so daß w_i Anfangsstück von w_{i+1} und von mindestens einem Element aus L ist $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

4. Aufgabe: Eine Formelmenge $\mathbf{M_0}$ heißt ein *Axiomensystem* für eine Formelmenge $\mathbf{M}$, falls

$$\{\mathcal{A}|\mathcal{A} \text{ ist Modell für } \mathbf{M_0}\} = \{\mathcal{A}|\mathcal{A} \text{ ist Modell für } \mathbf{M}\}\,.$$

$\mathbf{M}$ heißt *endlich axiomatisierbar*, falls es ein endliches Axiomensystem für $\mathbf{M}$ gibt.

Es sei $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$ ein Axiomensystem für eine gewisse Menge $\mathbf{M}$, wobei für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$\models (F_{n+1} \to F_n) \quad \text{und} \quad \not\models (F_n \to F_{n+1}).$$

Man zeige: $\mathbf{M}$ ist nicht endlich axiomatisierbar. Zeigen Sie dafür zunächst: Die Menge $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$ enthält unendlich viele Atomformeln.

Sei $\mathbf{M}$ die Menge der Tautologien bzw. widersprüchlichen Formeln. Ist $\mathbf{M}$ endlich axiomatisierbar?