Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2013/2014
19.12.2013

Theoretische Informatik I

10. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe *1* bitte bis zum *05.01.2014* ab. (Briefkasten vorm Raum 1/266 oder per eMail an `falu@informatik.tu-chemnitz.de`, *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`)
Die Aufgaben werden diesmal als Zusatzpunkte gewertet.

1. Aufgabe: Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, d.h. die Rechnung $(A \cdot B) \cdot C$ liefert das gleiche Ergebnis wie die Rechnung $A \cdot (B \cdot C)$. Allerdings sind je nach Klammerung unterschiedlich viele skalare Multiplikationen notwendig.

Ein Beispiel. Die 3×5-Matrix A, die 5×3-Matrix B und die 3×3-Matrix C.

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Die Rechnung $(A \cdot B) \cdot C$ benötigt $3^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 3 = 72$ Multiplikationen, während $A \cdot (B \cdot C)$ $(5 \cdot 3) \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 = 90$ Multiplikationen benötigt.

Sind nun n Matrizen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gegeben, interessiert man sich für die Klammerung des Produktes $M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_n$, bei der die wenigsten Multiplikationen ausgeführt werden müssen.

(a) Geben Sie zunächst einen rekursiven Lösungsansatz für das Problem an.

Wichtig: Wie berechnet sich die Anzahl der notwendigen Multiplikationen für die betrachteten Teilstücke?

(b) Entwerfen Sie daraus einen Algorithmus, der dieses Problem in einer Laufzeit von $O(n^3)$ löst. Verwenden Sie dazu den Ansatz der dynamischen Programmierung.

(c) Welche bedeutung haben Ihre Tabellenenträge und in welcher Reihenfolge müssen diese ausgefüllt werden?

Geben Sie am Ende auch eine optimale Klammerung aus.

Die Eingabe ist ein Feld $D[0..n]$ mit den Dimensionen der Matrizen. Dabei steht $D[i-1]$ für die Anzahl der Zeilen vom M_i und $D[i]$ für die Anzahl der Spalten von M_i. Im Beispiel wäre D also $[3, 5, 3, 3]$.

Hinweis: Die *Matrixkettenmultiplikation* ist dem Problem des *optimalen statischen binären Suchbaumes* aus der Vorlesung sehr ähnlich.

2. Aufgabe: Gegeben sind die beiden Zeichenfolgen A und B.

$$A = \text{cdbaeg} \quad B = \text{abdgae}$$

Berechnen Sie die *längste gemeinsame Teilfolge* von A und B. Verwenden Sie dazu das Verfahren zur dynamischen Programmierung aus der Vorlesung.

3. Aufgabe: Seien zwei Zeichenfolgen z_1 und z_2 gegeben. Analog zur längsten gemeinsamen Teilfolge kann man die *kürzeste gemeinsame Oberfolge* definieren. Für $z_1 = abec$ und $z_2 = dbc$ wäre das *adbec* oder auch *dabec*.
Formulieren Sie einen Algorithmus, der mit Hilfe dynamischer Programmierung die kürzeste gemeinsame Oberfolge in Zeit $O(|z_1| \cdot |z_2|)$ findet.

4. Aufgabe: Wir betrachten das Problem des *optimalen statischen (Binär-)Suchbaums*. Gegeben seien die Worte

$$w_1 = \text{gib} \qquad w_2 = \text{hallo} \qquad w_3 = \text{ich} \qquad w_4 = \text{zu}$$

Diese werden mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = 0.3 \qquad p_2 = 0.4 \qquad p_3 = 0.1 \qquad p_4 = 0.2$$

gesucht.
Lösen Sie das Problem mit dynamischer Programmierung:

(a) Welche Bedeutung hat der Tabelleneintrag $T[i, j]$?

(b) Geben Sie die Tabelle T am Ende des Algorithmus an.

(c) Geben Sie den optimalen statischen Suchbaum an.