Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2013/2014
25.10.2013

Theoretische Informatik I

3. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe *4* bitte bis zum *01.11.2013* ab. (Briefkasten vorm Raum 1/266 oder per eMail an `falu@informatik.tu-chemnitz.de`, *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`)

1. Aufgabe:

(a) Sei $c > 1$ eine beliebige Konstante. Zeigen Sie ohne Verwendung der Differentialrechnung, daß es ein $x_0 = x_0(c)$ gibt, so daß für alle $x > x_0$ gilt

$$2^x > x^c.$$

(b) Folgern Sie aus a), dass für jede noch so große Konstante k und jede noch so kleine Konstante $d > 1$

(i) $d^x > x^k$ (ii) $x > (\ln x)^k$ (iii) $d^{\sqrt[k]{x}} > x^k$

gilt, wenn $x > x_0 = x_0(d, k)$ erfüllt ist.

2. Aufgabe: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit mindestens zwei Knoten. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Summe der Grade aller Knoten ist durch 2 teilbar.

(b) *Es gibt stets zwei Knoten, die denselben Grad haben.

3. Aufgabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ wird *bipartit* oder *2-färbbar* genannt, wenn es zwei Mengen V_1 und V_2 gibt, so dass folgendes gilt:

- $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
- Für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ gilt entweder $u \in V_1$ und $v \in V_2$ oder $u \in V_2$ und $v \in V_1$. Das heißt, es gibt keine Kante, bei der beide Endpunkte zu V_1 oder beide Endpunkte zu V_2 gehören.

Der Begriff *2-färbbar* wird benutzt, weil man die Knoten des Graphen so mit zwei Farben färben kann, dass keine Kante zwei gleich gefärbte Knoten verbindet.

(a) *Geben Sie einen Algorithmus an, der mit einer Laufzeit $O(|V| + |E|)$ erkennt, ob ein gegebener ungerichteter Graph G *2-färbbar* ist. Verwenden Sie die Breitensuche und die von der Breitensuche gelieferten Distanzwerte.

(b) *Analog zu 2-färbbaren Graphen sind *3-färbbare* Graphen definiert. Versuchen Sie, Ihre Idee aus a) für einen Test auf 3-Färbbarkeit zu übertragen.

(c) Geben Sie einen Algorithmus an, der erkennt, ob ein gegebener Graph 3-färbbar ist oder nicht. Bestimmen Sie die Laufzeit Ihres Verfahrens.

4. Aufgabe: Betrachten Sie folgenden Algorithmus, der als Eingabe einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ erhält.

1. $G' = G$
2. `Solange es in` G' `einen Knoten` u `mit Grad` ≤ 2 `gibt`
   `Entferne` u `(mit all seinen Kanten) aus` G'
3. `Falls` G' `leer ist: Ausgabe '`G `ist 3-färbbar'`
4. `Sonst: Ausgabe 'weiß nicht'`

(a) Wir betrachten den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ E &= \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{4, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 5\}, \{6, 5\}, \{7, 5\}, \{5, 4\}\}. \end{aligned}$$

Geben Sie G' *nach jedem Durchlauf* von Schritt 2 an.

(b) Geben Sie einen dreifärbbaren Graphen G an, bei dem obiger Algorithmus die Antwort „weiß nicht“ liefert. Geben Sie auch G' am Ende von Schritt 2 an.

(c) Zeigen Sie die Korrektheit des Algorithmus. D.h. wenn der Graph *nicht* 3-färbbar ist, darf auf keinen Fall „G ist 3-färbbar“ ausgegeben werden!

Hinweis: Verfolgen Sie den Algorithmus vom Ende her zum Anfang hin. ($\rightarrow$ Induktionsbeweis)

Hinweis: Schwierige Aufgaben sind mit * gekennzeichnet.