Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

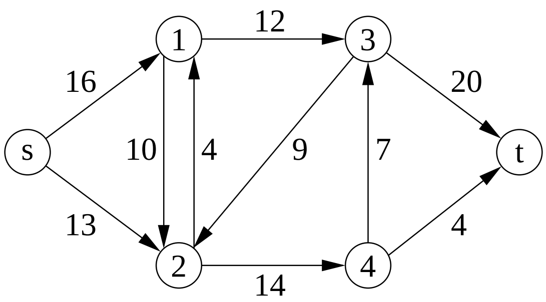
TU Chemnitz
Wintersemester 2011/2012
02.12.2011

# Theoretische Informatik I

## 9. Übung

Geben Sie die Lösungen der Aufgaben *1 und 3* bitte bis zum *09.12.2011* ab. (Briefkasten vorm Raum 1/266 oder per eMail an `falu@informatik.tu-chemnitz.de`, *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`)

**1. Aufgabe:** Bestimmen Sie den *maximalen Fluss* durch das unten abgebildete Netzwerk. Nutzen Sie den Algorithmus von *Ford-Fulkerson* und geben Sie nach jeder Erhöhung des Flusses das *Restnetzwerk* und den *aktuellen Fluss* durch die Kanten an.



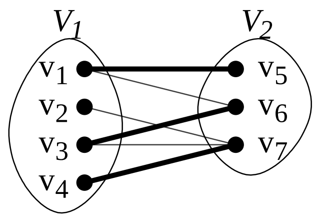

Gehen Sie davon aus, dass die Wege von $s$ nach $t$ in der folgenden Reihenfolge gefunden werden:

1. $(s, 1, 3, 2, 4, t)$
2. $(s, 2, 4, 3, t)$
3. $(s, 1, 3, t)$
4. $(s, 1, 2, 3, t)$

**2. Aufgabe:** Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und Knoten $u, v \in V$. Weiterhin sei $M$ eine Menge von *Wegen* vom Knoten $u$ zum Knoten $v$, die jeweils kantendisjunkt zueinander sind.
Geben Sie einen Algorithmus an, der eine solche Menge $M$ bestimmt. Die Größe der Menge $M$ soll dabei *maximal* sein.

**3. Aufgabe:** Der Algorithmus von *Ford-Fulkerson* kann in eine Endlosschleife geraten, wenn das Flußnetzwerk *reelle* Kapazitäten besitzt.
Zeigen Sie, dass *Ford-Fulkerson* in jedem Fall terminiert, wenn *rationale* Kapazitäten gegeben sind.

**4. Aufgabe:** Ein *Matching* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge von Kanten $M \subseteq E$, so dass gilt: Die Kanten aus der Teilmenge $M$ haben keinen gemeinsamen Knoten. Ein Matching $M$ hat die *maximale Größe*, wenn es kein Matching $M'$ mit $|M'| > |M|$ gibt.




In bipartiten Graphen $G = (V_1 \cup V_2, E)$, wie im obigen Bild, läßt sich ein solches *Matching maximaler Größe* mit Hilfe des Algorithmus von *Ford-Fulkerson* bestimmen.
Geben Sie eine Konstruktion für ein Flussnetzwerk an, in dem der maximale Fluss der Größe eines maximalen Matchings entspricht.

**5. Aufgabe:** Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph, dessen Knotenmengen $V_1$ bzw. $V_2$ *Personen* bzw. *Jobs* darstellen. Eine Kante zwischen einer *Person* und einem *Job* symbolisiert, dass die Person die entsprechende Tätigkeit ausüben kann. Ziel ist es, soviele Jobs wie möglich abzudecken. Dabei können jeder Person bis zu *zwei* Tätigkeiten gleichzeitig zugemutet werden.
Lösen Sie das Problem mit Hilfe von Flussalgorithmen. Stellen Sie das entsprechende Netzwerk dar und erklären Sie, warum es geeignet ist.

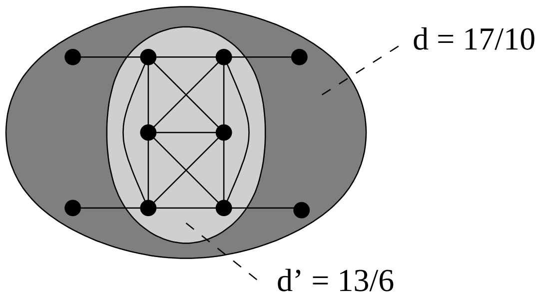
**6. Aufgabe:** Die Dichte $d$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist durch das Verhältnis zwischen der Anzahl der Kanten und der Anzahl der Knoten definiert.

$$d = \frac{\#Kanten}{\#Knoten} = \frac{|E|}{|V|}$$

Sei nun $d'$ die Dichte in einem Teilgraph $G' = (V', E')$. Finden Sie mit Hilfe eines Flussnetzwerkes heraus, ob für jeden Teilgraph $G'$ von $G$ die folgende Beziehung gilt:

$$d' = \frac{|E'|}{|V'|} \leq k$$

Der Graph $G$ also keinen Teilgraph besitzt, der eine Dichte $> k$ hat. Die folgende Abbildung zeigt einen Graph mit der Dichte $d = \frac{17}{10}$, der einen Teilgraph mit der Dichte $d' = \frac{13}{6} > d$ besitzt.




*Hinweis:* Nehmen Sie $k$ als ganzzahlig an und betrachten Sie zunächst den Fall $k = 1$.