Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2011/2012
18.11.2011

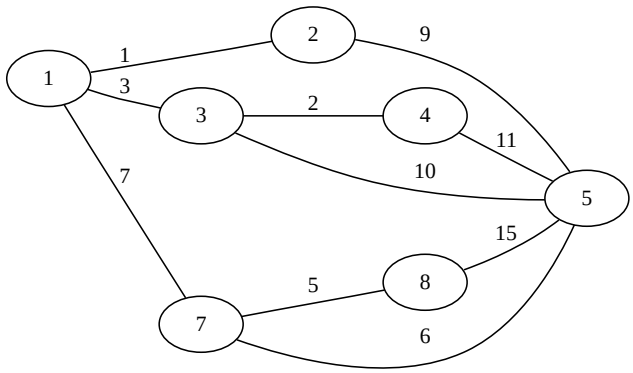
Theoretische Informatik I

7. Übung

Geben Sie die Lösung der Aufgabe *1* bitte bis zum *25.11.2011* ab. (Briefkasten vorm Raum 1/266 oder per eMail an `falu@informatik.tu-chemnitz.de`, *Betreff:* `TI1 Hausaufgaben`)

1. Aufgabe:

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe von *Prims Algorithmus* (mit Heap) den minimalen Spannbaum des folgenden Graphen.



Geben Sie für jeden Schritt den Inhalt der Arrays `key` und `kante` an und beginnen Sie den Algorithmus bei Knoten `5`.

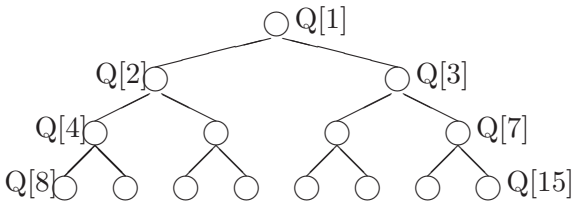
(b) Geben Sie eine *vollständige* Implementierung von *Prims Algorithmus* (inklusive Heap) an, die die Laufzeit von $O(|E| \cdot \log |V|)$ tatsächlich erreicht. Auf das Einlesen des Graphen können Sie verzichten, dieser kann als globale Datenstruktur gegeben sein.

2. Aufgabe: Wir betrachten einen Heap, der in einem Array $Q[1..n]$ implementiert ist. Zeigen Sie folgende *Vater-Sohn-Beziehung*:

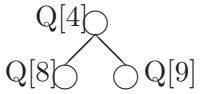
> Steht in einem Heap ein Element an Position i, dann steht der linke Sohn des Elements an Position $2 \cdot i$ und der rechte Sohn an Position $2 \cdot i + 1$.

3. Aufgabe: Zeigen Sie, dass der folgende Algorithmus die Laufzeit $O(n)$ hat.

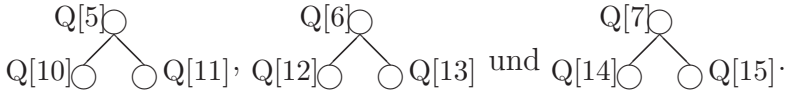
Gegeben sei ein Feld $Q[1..n]$ von Elementen. Wir wollen aus Q einen Heap aufbauen. Wir nehmen $n = 2^k - 1$ an und betrachten Q als Baum (z. B. $k = 4$):



Der Heap wird nun *bottom-up* aufgebaut. Das heißt, zuerst wird in dem Teil



die Heap-Eigenschaft hergestellt, indem $Q[4]$ an die richtige Stelle sickert. Genauso verfahren wir mit den Teilen



Danach lassen wir $Q[2]$ bzw. $Q[3]$ an die richtige Stelle sickern, um in den Teilbäumen

die Heapeigenschaft herzustellen. Schließlich entsteht durch Sickern von $Q[1]$ ein korrekter Heap.

Hinweis: Überprüfen Sie, wie oft ein Knoten aus Ebene i maximal sickern kann, bis er an der richtigen Stelle steht. Summieren Sie diesen Wert über alle Knoten. Die entstehende Summenformel kann auf eine geometrische Reihe zurückgeführt werden, wenn man die Ungleichung $i < 1,5^i$ benutzt.