Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Andreas Goerdt
Professur Theoretische Informatik
Technische Universität Chemnitz

10. Oktober 2011

Bitte beachten:

Beim vorliegenden Skript handelt es sich um eine vorläufige, unvollständige Version nach handschriftlicher Vorlage. Ergänzungen und nachfolgende Korrekturen sind möglich.

Version vom 10. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort Diese Vorlesung ist eine Nachfolgeveranstaltung zu Algorithmen und Programmierung im 1. Semester und zu Datenstrukturen im 2. Semester.

Theoretische Informatik I ist das Gebiet der effizienten Algorithmen, insbesondere der Graphalgorithmen und algorithmischen Techniken. Gemäß dem Titel „Theoretische Informatik“ liegt der Schwerpunkt der Vorlesung auf beweisbaren Aussagen über Algorithmen.

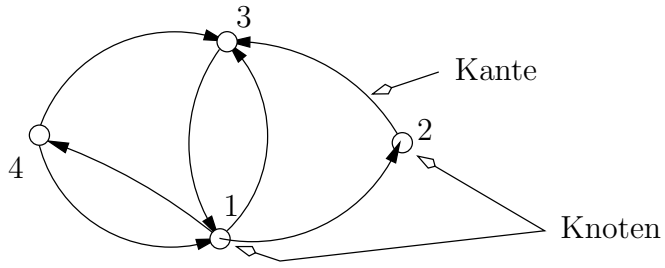
Der Vorlesung liegen die folgenden Lehrbücher zugrunde:

Schöning:	Algorithmik. Spektrum Verlag 2000
Corman, Leiserson, Rivest:	Algorithms.[1]The MIT Press 1990
Aho, Hopcroft, Ullmann:	The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addison Wesley 1974
Aho, Hopcroft, Ullmann:	Data Structures and Algorithms. Addison Wesley 1989
Ottman, Widmayer:	Algorithmen und Datenstrukturen. BI Wissenschaftsverlag 1993
Heun:	Grundlegende Algorithmen. Vieweg 2000

Besonders die beiden erstgenannten Bücher sollte jeder Informatiker einmal gesehen (d.h. teilweise durchgearbeitet) haben.

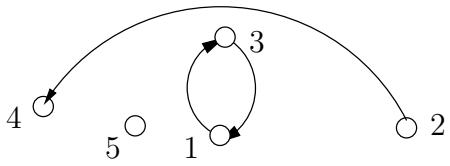
[1] Auf Deutsch im Oldenburg Verlag

1 Gerichtete Graphen

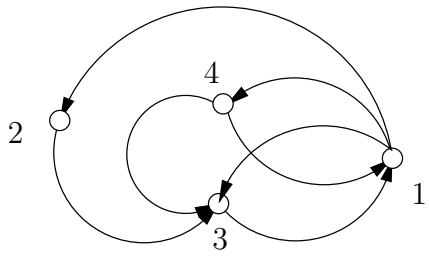


Graph G_1, gerichtet

Ein gerichteter Graph besteht aus einer Menge von Knoten (vertex, node) und einer Menge von Kanten (directed edge, directed arc).



Hier ist die Menge der Knoten $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und die Menge der Kanten $E = \{(3, 1), (1, 3), (2, 4)\}$.

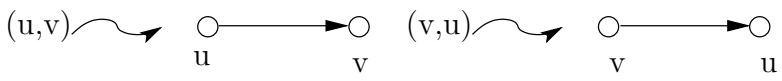


Hierbei handelt es sich um den gleichen Graphen wie im ersten Bild. Es ist $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(4, 1), (1, 4), (3, 1), (1, 3), (4, 3), (1, 2), (2, 3)\}$.

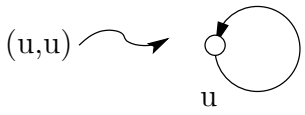
Definition 1.1(gerichteter Graph): *Ein gerichteter Graph besteht aus zwei Mengen:*

- V*, eine beliebige, endliche Menge von Knoten*
- E*, eine Menge von Kanten wobei* $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$

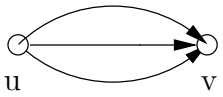
Schreibweise: $G = (V, E)$.



In der Vorlesung *nicht* betrachtet werden Schleifen (u, u):



und Mehrfachkanten $(u, v)(u, v)(u, v)$:



Folgerung 1.1: *Ist $|V| = n$, so gilt: Jeder gerichtete Graph mit Knotenmenge V hat $\leq n \cdot (n-1)$ Kanten. Es ist $n \cdot (n-1) = n^2 - n$ und damit $O(n^2)$.*

Ein Beweis der Folgerung folgt auf Seite 7.

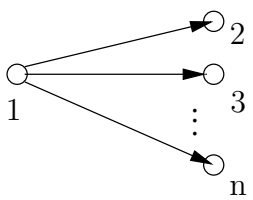
Erinnerung: *$f(n)$ ist $O(n^2)$ bedeutet: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass $f(n) \leq C \cdot n^2$ für* alle *hinreichend großen n gilt.*

- Ist eine Kante (u, v) in G vorhanden, so sagt man: v ist adjazent zu u.
- Ausgangsgrad $(v) = |\{(v, u) \mid (v, u) \in E\}|$.
- Eingangsgrad $(u) = |\{(v, u) \mid (v, u) \in E\}|$.

Für eine Menge M ist $\#M = |M|$ = die Anzahl der Elemente von M.

Es gilt immer:

$$0 \leq Agrad(v) \leq n-1 \text{ und}$$
$$0 \leq Egrad(u) \leq n-1$$

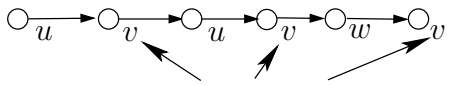


$$Egrad(1) = 0, Agrad(1) = n-1$$

Definition 1.2(Weg): *Eine Folge von Knoten* $(v_0, v_1, ..., v_k)$ *ist ein Weg in* $G = (V, E)$ *gdw. (genau dann, wenn)* $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{k-1} \to v_k$ *Kanten in* E *sind.*

Die Länge von $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{k-1} \to v_k$ ist k. Also die Länge ist die Anzahl der Schritte. Die Länge von $v_0 = 0$.

Ist $E = \{(u, v), (v, w), (w, v), (v, u)\}$, so ist auch



ein Weg, seine Länge ist 5.

Ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_k)$ ist *einfach* genau dann, wenn $|\{v_0, v_1, ..., v_k\}| = k + 1$ (d.h., alle v_i sind verschieden).
Ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_k)$ ist *geschlossen* genau dann, wenn $v_0 = v_k$.
Ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_k)$ ist ein *Kreis* genau dann, wenn:

- $k \geq 2$ und
- $(v_0, v_1, ..., v_{k-1})$ einfach und
- $v_0 = v_k$

Es ist z.B. $(1, 2, 1)$ ein Kreis der Länge 2 mit $v_0 = 1, v_1 = 2$ und $v_2 = 1 = v_0$. Beachte noch einmal: Im Weg $(v_0, v_1, ..., v_k)$ haben wir $k+1$ v_i's aber nur k Schritte (v_i, v_{i+1}).

Die Kunst des Zählens ist eine unabdingbare Voraussetzung zum Verständnis von Laufzeitfragen. Wir betrachten zwei einfache Beispiele:

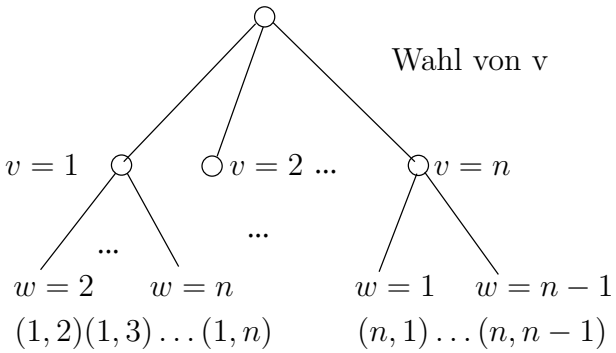
1. Bei $|V| = n$ haben wir insgesamt genau $n \cdot (n - 1)$ gerichtete Kanten.

   Eine Kante ist ein Paar (v, w) mit $v, w \in V, v \neq w$.

   # Möglichkeiten für v: n
   Ist v gewählt, dann # Möglichkeiten für w: $n - 1$ (!)
   Jede Wahl erzeugt genau eine Kante. Jede Kante wird genau einmal erzeugt.
   Multiplikation der Möglichkeiten ergibt: $n \cdot (n - 1)$

   Jedes Blatt = genau eine Kante, # Blätter $= n \cdot (n - 1) = n^2 - n$.

   Alternative Interpretation von $n^2 - n$:
   n^2 = # aller Paare (v, w), $v, w \in V$ (auch $v = w$) (Auswahlbaum)
   n = # Paare (v, v) $v \in V$. Diese werden von n^2 abgezogen.



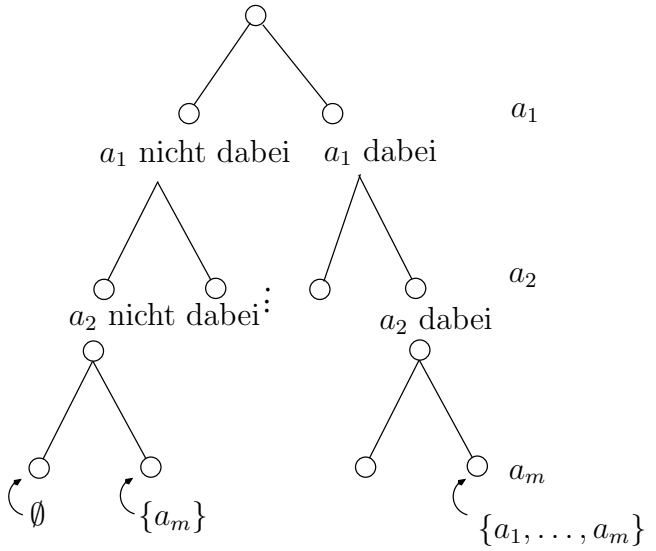
Veranschaulichung durch „Auswahlbaum“ für Kante (v, w)

2. Bei einer Menge M mit $|M| = m$ haben wir genau 2^m Teilmengen von M.
   Teilmenge von M = Bitstring der Länge m, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$

   $0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \to \emptyset$
   $0\ 0\ 0 \dots 0\ 1 \to \{a_m\}$
   $0\ 0\ 0 \dots 1\ 0 \to \{a_{m-1}\}$
   $0\ 0\ 0 \dots 1\ 1 \to \{a_{m-1}, a_m\}$
   $\vdots$
   $1\ 1\ 1 \dots 1\ 1 \to \{a_1, a_2, ..., a_m\} = M$

   2^m Bitstrings der Länge m. Also # gerichtete Graphen bei $|V| = n$ ist genau gleich $2^{n(n-1)}$. Ein Graph ist eine Teilmenge von Kanten.

   Noch den Auswahlbaum für die Teilmengen von M:



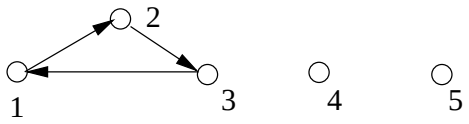
Tiefe = m, # Blätter = 2^m

1.1 Datenstruktur Adjazenzmatrix

Darstellung von $G = (V, E)$ mit $V = \{1, ..., n\}$.
Matrix

$$A = (a_{u,v}), 1 \leq u \leq n, 1 \leq v \leq n, a_{u,v} \in \{0, 1\}$$
$$a_{u,v} = 1 \Leftrightarrow (u, v) \in E$$
$$a_{u,v} = 0 \Leftrightarrow (u, v) \notin E.$$

Implementierung durch Array $A[\ \ ][\ \ ]$.



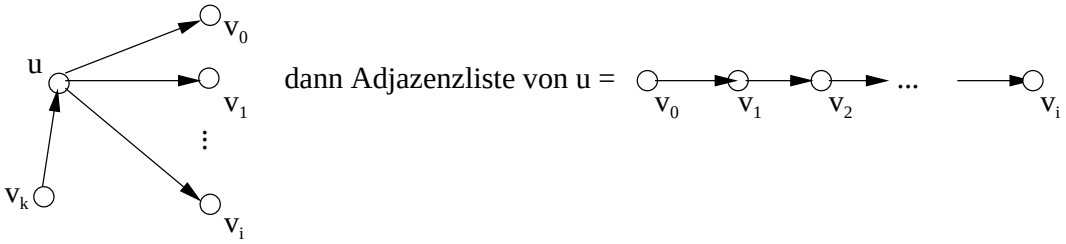
$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

A hat immer n^2 Speicherplätze, egal wie groß $|E|$ ist. Jedes $|E| \geq \frac{n}{2}$ ist sinnvoll möglich, denn dann können n Knoten berührt werden.

1.2 Datenstruktur Adjazenzliste

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

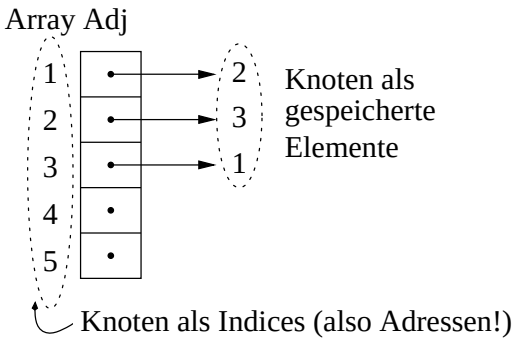
- Adjazenzliste von u = Liste der direkten Nachbarn von u



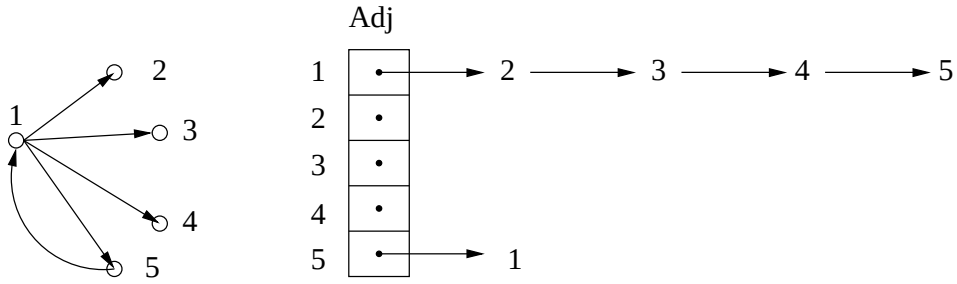
Nicht in der Adjazenzliste ist v_k, jede Reihenfolge von $v_1, ..., v_i$ erlaubt.

- Adjazenzlistendarstellung von $G =$ Array $Adj[\ ]$, dessen Indices für V stehen, $Adj[v]$ zeigt auf Adjazenzliste von v.

  Beispiel wie oben:



  ein anderes Beispiel:

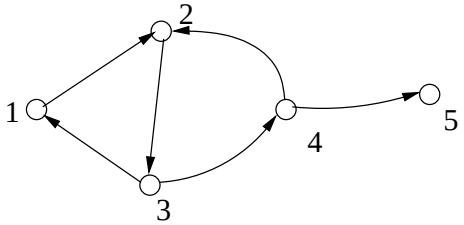


  Platz zur Darstellung von $G = (V, E)$: $c + n + d \cdot |E|$ Speicherplätze mit

  c : Initialisierung von A (konstant)
  n: Größe des Arrays A
  $d \cdot |E|$: jede Kante einmal, d etwa 2, pro Kante 2 Plätze

  Also $O(n + |E|)$ Speicherplatz, $O(|E|)$ wenn $|E| \geq \frac{n}{2}$. Bei $|E| < \frac{n}{2}$ haben wir isolierte Knoten, was nicht sinnvoll ist.

  Was, wenn keine Pointer? Adjazenzlistendarstellung in Arrays!
  An einem Beispiel:

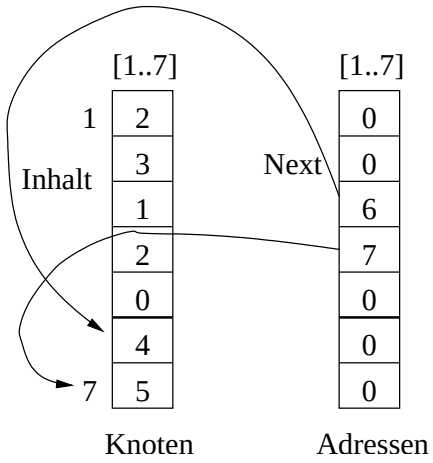


  Die Größe des Arrays ist nicht unbedingt gleich der Kantenanzahl, aber sicherlich $\leq |E| + |V|$. Hier ist A[1 ... 6] falsch. Wir haben im Beispiel A[1 ... 7]. Die Größe des Arrays ist damit $|E|$ + # Knoten vom $Agrad = 0$.

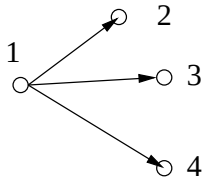
1	2	3	4	5	6	7
2 0	3 0	1 6	2 7	0 0	4 0	5 0

Erklärung:

Position 1-5 repräsentieren die Knoten, 6 und 7 den Überlauf. Knoten 1 besitzt eine ausgehende Kante nach Knoten 2 und keine weitere, Knoten 2 besitzt eine ausgehende Kante zu Knoten 3 und keine weitere. Knoten 3 besitzt eine ausgehende Kante zu Knoten 1 und eine weitere, deren Eintrag an Position 6 zu finden ist. Dieser enthält Knoten 4 sowie die 0 für „keine weitere Kante vorhanden“. Alle weiteren Einträge erfolgen nach diesem Prinzip. Das Ganze in zwei Arrays:



Ein weiteres Beispiel:



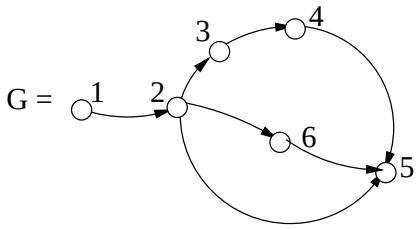
1	2	3	4	5	6
2 5	0 0	0 0	0 0	4 6	3 0

Anzahl Speicherplatz sicherlich immer $\leq 2 \cdot |V| + 2 \cdot |E|$, also $O(|V| + |E|)$ reicht aus.

1.3 Breitensuche

Gibt es einen Weg von u nach v im gerichteten Graphen $G = (V, E)$?
Algorithmische Vorgehensweise: Schrittweises Entdecken der Struktur

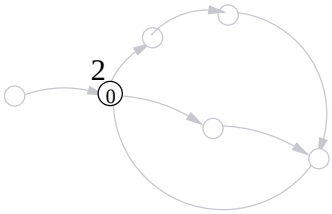
Dazu ein Beispiel:



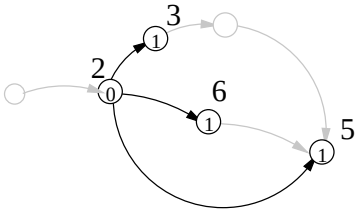
Weg von 2 nach 4 (4 von 2 erreichbar)?

Entdecktiefe

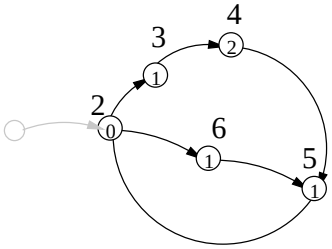
0



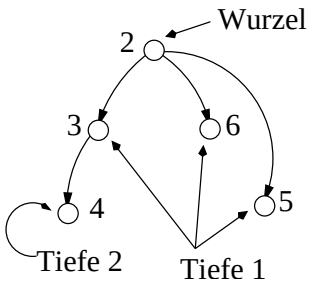
1



2



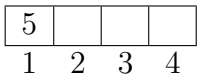
Der Breitensuchbaum ist ein Teilgraph von G und enthält alle Kanten, über die entdeckt wurde:



Implementierung mit einer Schlange:

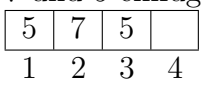
1.4 Datenstruktur Schlange

Array $Q[1..n]$ mit Zeigern in Q hinein, head, tail. Einfügen am Ende (tail), Löschen vorne (head).



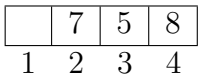
head = 1, tail = 2

7 und 5 einfügen:



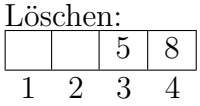
head = 1, tail = 4

Löschen und 8 einfügen:



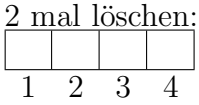
head = 2, tail = 1

Löschen:



head = 3, tail = 1

2 mal löschen:



head = 1, tail = 1

Schlange leer!

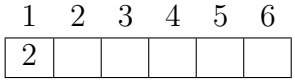
Beachte: Beim Einfügen immer tail+1 $\neq$ head, sonst geht es nicht mehr, tail ist immer der nächste freie Platz (tail+1 wird mit „Rumgehen“ um das Ende des Arrays berechnet.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{tail} < \text{head} \iff \text{Schlange geht ums Ende} \\ \text{tail} = \text{head} \iff \text{Schlange leer}\end{array}}$$

First-in first-out = Schlange

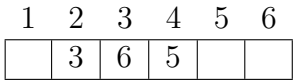
Am Beispiel von G oben, die Schlange im Verlauf der Breitensuche:

Bei $|V| = n \geq 2$ reichen n Plätze. Einer bleibt immer frei.



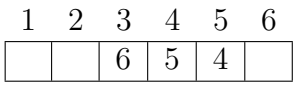
head = 1, tail = 2

3, 6, 5 rein, 2 raus



head = 2, tail = 5

4 rein, 3 raus



head = 3, tail = 6

5, 6 hat Entdecktiefe 1, 4 Entdecktiefe 2
6 raus nichts rein

1	2	3	4	5	6
			5	4	

head = 4, tail = 2

5, 4 raus, Schlange leer, head = tail = 6

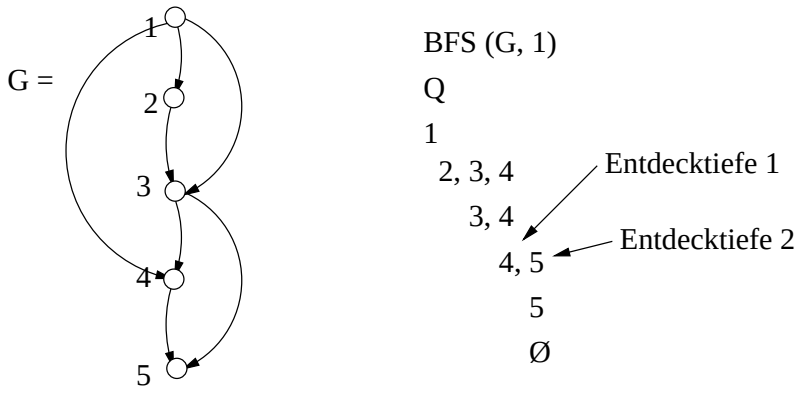
1.5 Algorithmus Breitensuche (Breadth first search = BFS)

BFS(G, s)
Eingabe: $G = (V, E)$ in Adjazenzlistendarstellung, $|V| = n$ und $s \in V$ der Startknoten

Datenstrukturen:

- Schlange $Q = Q[1..n]$ mit head und tail
- folgende Arrays: col$[1..n]$, um zu merken, ob Knoten bereits entdeckt wurde mit
  - col$[u]$ = weiß $\Leftrightarrow$ u noch nicht entdeckt
  - col$[u]$ = grau $\Leftrightarrow$ u entdeckt, aber noch nicht abgeschlossen, d.h. u in Schlange
  - col$[u]$ = schwarz $\Leftrightarrow$ u entdeckt und abgearbeitet

Noch ein Beispiel:

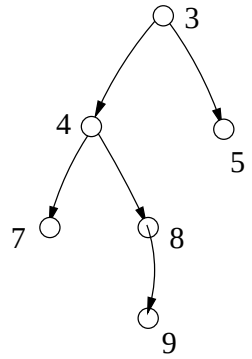


Zusätzlich: Array $d[1..n]$ mit $d[u]$ = Entdecktiefe von u. Anfangs $d[s] = 0$, $d[u] = \infty$ für $u \neq s$. Wird v über u entdeckt, so setzen wir $d[v] := d[u] + 1$ (bei Abarbeitung von u).

Zusätzlich: Breitensuchbaum durch Array $\pi[1..n]$. $\pi[s] = nil$, da s Wurzel. Wird v über u entdeckt, dann $\pi[v] := u$.

```
   /* Initialisierung */
1  foreach u ∈ V do
2     col[u]=weiß;
3  end
4  col[s]=grau;                                        /* s Startknoten */
5  Q=s;                                        /* Initialisierung zu Ende */
   /* Abarbeitung der Schlange */
6  while Q ≠ () do                                  /* Testbar mit tail ≠ head */
7     u=Q[head];                              /* u wird bearbeitet (expandiert) */
8     foreach v ∈ Adj[u] do
9        if col[v] == weiß then                              /* v wird entdeckt */
10          col[v]=grau;
11          v in Schlange einfügen;
                                                    /* Schlange immer grau */
12       end
13       u aus Q entfernen;
14       col[u] = schwarz;              /* Knoten u ist fertig abgearbeitet */
15    end
16 end
```

Interessante Darstellung des Baumes durch π: Vaterarray $\pi[u]$ = Vater von u! Wieder haben wir Knoten als Indices und Inhalte von π.



$\pi[9] = 8$, $\pi[8] = 4$, $\pi[4] = 3$, $\pi[5] = 3$, $\pi[7] = 4$

$\pi[u] = v \Rightarrow$ Kante (v, u) im Graph.

Verifikation? Hauptschleife ist Zeile 8-15. Wie läuft diese?

$Q_0 = (s), col_0[s] =$ grau, „$col_0 =$ weiß“ sonst.

1. Lauf

$Q_1 = \underbrace{(u_1, \ldots, u_k)}_{Dist=1}, col_1[s] =$ schwarz, $col_1[u_i] =$ grau, weiß sonst.
$Dist(s, u_j) = 1$
$(u_1, \ldots, u_k)$ sind *alle!* mit $Dist = 1$.

$Q_2 = (\underbrace{u_2, \ldots, u_k}_{Dist1}, \underbrace{u_{k+1}, \ldots, u_t}_{Dist2})$ $col[u_1] =$ schwarz

Alle mit $Dist = 1$ entdeckt.

$k - 2$ Läufe weiter

$Q_k = (\underbrace{u_k}_{Dist1}, \underbrace{u_{k+1} \ldots}_{Dist2})$

$Q_{k+1} = (\underbrace{u_{k+1}, \ldots, u_t}_{Dist2}), u_{k+1} \ldots u_t$ sind *alle* mit $Dist2$ (da alle mit $Dist = 1$ bearbeitet).

$Q_{k+2}(\underbrace{\ldots}_{Dist=2}, \underbrace{\ldots}_{Dist=3})$
$\vdots$
$\underbrace{(\ldots)}_{Dist=3}$
und *alle* mit $Dist = 3$ erfasst (grau oder schwarz).
$\vdots$

Allgemein: Nach l-tem Lauf gilt:

Schleifeninvariante: Falls $Q_l \neq ()$, so:

- $Q_l = (\overbrace{u_1, \ldots}^{U}, \underbrace{\overbrace{\ldots}^{V}}_{DistD+1})$

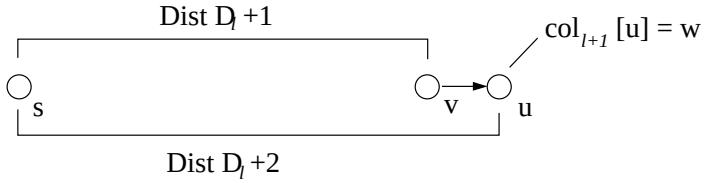
  $D_l = Dist(s, u_1), u_1$ vorhanden, da $Q_l \neq ()$.

- *Alle* mit $Dist \leq D_l$ erfasst (*)

- *Alle* mit $Dist = D_l + 1$ (= weiße Nachbarn von U) $\cup$ V. (**)

Beweis. Induktion über l
$l = 0$ (vor erstem Lauf), Gilt mit $D_0 = 0, U = (s), V = \emptyset$.
$l = 1$ (nach erstem Lauf), Mit $D_1 = 1, U =$ Nachbarn von $s, V = \emptyset$.
Gilt Invariante nach l-tem Lauf, also
$Q_l = (\overbrace{u_1, \ldots, u_k}^{DistD_l}, \overbrace{v_1, \ldots, v_r}^{DistD_l+1})$ mit (*), (**), $D_l = Dist(s, u_1)$.
Findet $l+1$-ter Lauf statt (also v_1 expandieren).
1. Fall: $u_1 = u_k$

- $Q_{l+1} = (v_1, \ldots, v_r \overbrace{\ldots}^{\text{Nachbarn von } u_1}), D_l + 1 = Dist(s, v_1)$
- Wegen (**) nach l gilt jetzt Q_{l+1} = alle die Knoten mit $Dist = D_l + 1$
- Also gilt jetzt (*), wegen (*) vorher
- Also gilt auch (**), denn:

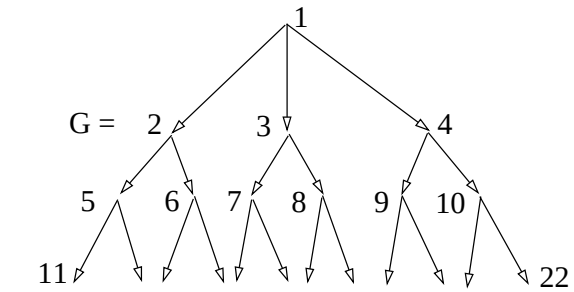


2. Fall: $u_1 \neq u_k$

- $Q_{l+1} = (u_2 \ldots u_k, v_1 \ldots v_r \overbrace{\ldots}^{\text{weiße Nachbarn von } u_1}), D_{l+1} = Dist(s, u_2) = D_l.$
- (*) gilt, da (*) vorher
- Es gilt auch (**), da weiße Nachbarn von u_1 jetzt in Q_{l+1}.

Aus 1. Fall und 2. Fall für beliebiges $l \geq 1$ Invariante nach l-tem Lauf
$\Longrightarrow$
Invariante nach $l+1$-tem Lauf.
Also Invariante gilt nach jedem Lauf.

Etwa:



$Q_0 = (1)$ $D_0 = 0$
$Q_1 = (2, 3, 4)$ $D_1 = 1$, alle dabei!
$Q_2 = (\overbrace{3, 4}^{u}, \overbrace{5, 6}^{v})$ $D_2 = 1$
$Q_3 = (5, 6, 7, 8, 9, 10)$ $D_4 = 2$(!) Alle dabei!

□

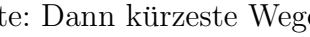
Quintessenz (d.h. das Ende)
Vor letztem Lauf:

- $Q = (u), D = \Delta$
- Alle mit $Dist \leq \Delta$ erfasst.
- Alle mit $\Delta + 1 =$ weiße Nachbarn von u.

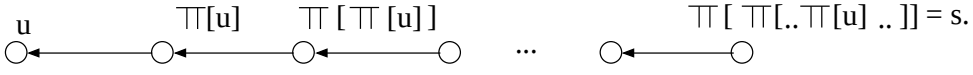
(wegen Invariante) Da letzter Lauf, danach $Q = ()$, alle $\leq \Delta$ erfasst, es gibt keine $\geq \Delta + 1$.
Also: Alle von s Erreichbaren erfasst, Termination: Pro Lauf ein Knoten aus Q, schwarz, kommt nie mehr in Q. Irgendwann ist Q zwangsläufig leer.

Nach BFS(G,s): Alle von s erreichbaren Knoten werden erfasst.

- $d[u] = Dist(s, u)$ für alle $u \in V$. Invariante um Aussage erweitern: Für alle erfassten Knoten ist $d[u] = Dist(s, u)$.
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Wege. Invariante erweitern gemäß: Für alle erfassten Knoten sind kürzeste Wege im Breitensuchbaum.

Beachte: Dann kürzeste Wege 

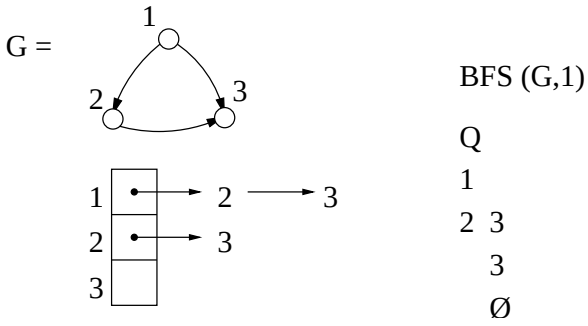
durch



Beobachtung

In BFS(G, s) wird jede *„von s erreichbare Kante“* (Kante (u, v), wobei u von s erreichbar ist) genau einmal untersucht. Denn wenn 

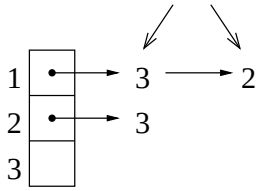
, dann ist u grau, v irgendwie, danach ist u schwarz und nie mehr grau.
Wenn (u, v) gegangen wird bei BFS(G, s), d.h. wenn u expandiert wird, ist u grau (col$[u]$ = grau) und v kann schwarz, grau oder weiß sein.
Die Farbe von v zu dem Zeitpunkt hängt nicht nur von G selbst, sondern auch von den Adjazenzlisten ab.



BFS (G,1)

Q
1
2 3
3
Ø

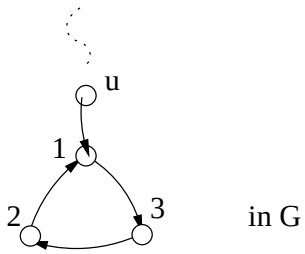
Beim Gang durch $(2, 3)$ ist 3 grau.



Beim Gang durch $(2, 3)$ ist 3 schwarz.

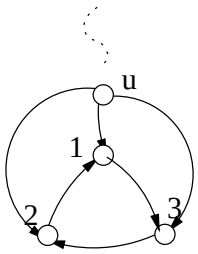
andere Farben: Übung 2

Weiterer Nutzen der Breitensuche? – Kreise finden?



1 ist der erste Knoten, der auf dem Kreis entdeckt wird. Wenn 2 expandiert wird, ist 1 schwarz.

Auch möglich:



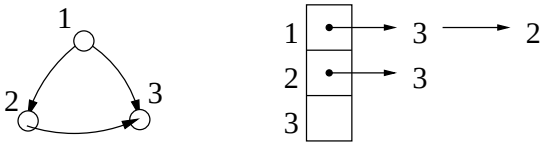
in G

Alle drei Knoten $1, 2, 3$ werden bei der Expansion von u aus das erste Mal entdeckt. Trotzdem: Es gibt eine Kante, die bei Bearbeitung auf einen schwarzen Knoten führt, hier (2,1).

Folgerung 1.2: *Kreis* $\Rightarrow$ *Es gibt eine Kante* u○——→○v*, so dass v schwarz ist, wenn* u○——→○v *gegangen wird.*

Ist ein Kreis daran erkennbar?

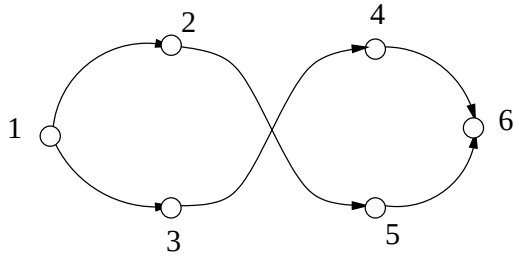
Leider nein:



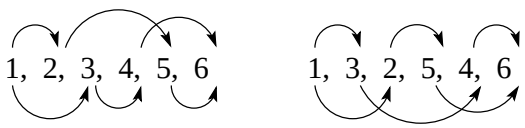
Dann 3 schwarz bei $(2, 3)$, trotzdem kein Kreis.

1.6 Topologische Sortierung

Wie erkenne ich kreisfreie gerichtete Graphen?

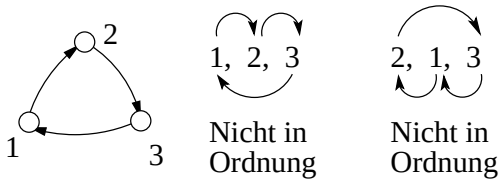


Anordnung der Knoten:



Alle Kanten gemäß der Ordnung.

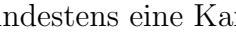
Aber bei Kreis:



Definition 1.3(Topologische Sortierung): *Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Eine topologische Sortierung ist eine Anordnung von V als $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, so dass gilt: Ist*

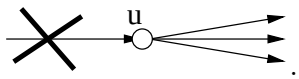
$\in E$, *so ist $u = v_i, v = v_j$ und $i < j$. Alle Kanten gehen von links nach rechts in der Ordnung.*

Satz 1.1: *G hat topologische Sortierung $\Longleftrightarrow$ G hat keinen Kreis.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei also $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ topologische Sortierung von G. Falls Kreis $(w_0, w_1, \ldots, w_0)$, dann mindestens eine Kante der Art 

mit $i < j$.

„$\Leftarrow$“ Habe also G keinen Kreis.

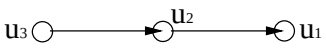
Dann gibt es Knoten u mit $Egrad(u) = 0$. Also 

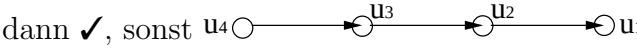
.

Wieso? Nehme irgendeinen Knoten u_1. Wenn $Egrad(u_1) = 0$, dann ✓.

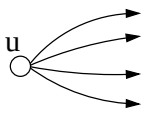
Sonst 

, nehme u_2 her. $Egrad(u_2) = 0$ ✓, sonst zu u_3 in G:



Falls $Egrad(u_3) = 0$, dann ✓, sonst 

in G.
Immer so weiter. Spätestens u_n hat $Egrad(u_n) = 0$, da sonst Kreis.

Also: Haben u mit $Egrad(u) = 0$. Also in G sieht es so aus: 

$v_1 = u$ erster Knoten der Sortierung. Lösche u aus G. Hier wieder Knoten u' mit $Egrad(u') = 0$ im neuen Graphen, wegen Kreisfreiheit. $v_2 = u'$ zweiter Knoten der Sortierung. Immer so weiter $\rightarrow$ gibt topologische Sortierung.
Formal: Induktion über $|V|$. □

1.7 Algorithmus Top Sort

Eingabe: $G = (V, E)$ beliebiger gerichteter Graph, $V = \{1, \ldots, n\}$.
Ausgabe: Array $v[1..n]$, so dass $(v[1], v[2], \ldots, v[n])$ eine topologische Sortierung darstellt, sofern G kreisfrei. Anderenfalls Meldung, dass G Kreis hat.

Vorgehensweise:

1. Suche Knoten u mit $Egrad(u) = 0$.
   Falls nicht existent $\Rightarrow$ Kreis.
   Falls u existiert $\Rightarrow$ u aus G löschen.
   Dazu Kanten (u, v) löschen.

2. Suche Knoten u im neuen Graphen mit $Egrad(u) = 0$
   $\vdots$
   Wie oben.

Wie findet man u gut?

1. Fall:
   Falls Adjazenzmatrix, $A = (a_{v_1,v_2})$, dann alle $a_{v_1,u} = 0$ für $v_1 \in V$.
2. Fall:
   G in Adjazenzlisten gegeben. Jedesmal Adjazenzlisten durchsuchen und schauen, ob ein Knoten u nicht vorkommt.
   (Dazu ein Array A nehmen, $A[u] = 1 \Leftrightarrow$ u kommt vor.)
   Ein solches u hat $Egrad(u) = 0$.
   Dann $Adj[u] = nil$ setzen.

Schleife mit n Durchläufen. Wenn kein u gefunden wird Ausgabe Kreis, sonst beim i-ten Lauf $v[i] = u$.

Verbessern der Suche nach u mit $Egrad(u) = 0$:

0. Ermittle Array $Egrad[1..n]$, mit den Eingangsgraden.

1. Suche u mit $Egrad[u] = 0$, $v[i] = u$, Kreis falls nicht existent.
   Für alle $v \in Adj[u]$
   $Egrad[v] = Egrad[v] - 1$
   $\vdots$

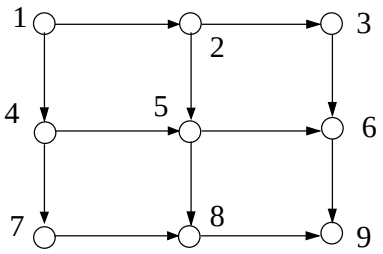
Weitere Verbesserung:
Knoten u mit $Egrad[u] = 0$ gleich in Datenstruktur (etwa Schlange) speichern.

1.8 Algorithmus Verbessertes Top Sort

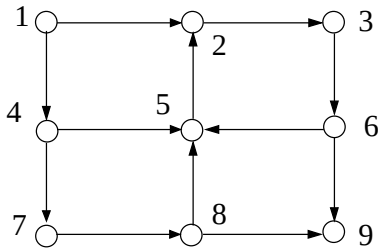
Eingabe: $G = (V, E)$ beliebiger gerichteter Graph in Adjazenzlistendarstellung. Sei $V = \{1, \ldots, n\}$.
Ausgabe: Wie bei Top Sort

Weitere Datenstrukturen:
- Array $EGrad[1..n]$ für aktuelle Eingangsgrade
- Schlange Q, Knoten mit $Egrad = 0$, Q kann auch Liste sein

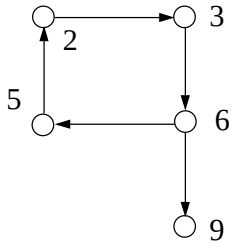
```
   /* 1. Initialisierung */
 1 Egrad[v] auf 0, Q = ();
 2 foreach v ∈ V do
 3    Gehe Adj[v] durch;
 4    zähle für jedes gefundene u Egrad[u] = Egrad[u]+1;
 5 end
   /* 2. Einfügen in Schlange */
 6 foreach u ∈ V do
 7    if Egrad[u]=0 then
 8       Q=enqueue(Q,u);
 9    end
10 end
   /* 3. Array durchlaufen */
11 for i=1 to n do
12    if Q=() then
13       Ausgabe „Kreis\; return;
14    end
      /* 4. Knoten aus Schlange betrachten */
15    v[i] = Q[head];
16    v[i] = dequeue(Q);
      /* 5. Adjazenzliste durchlaufen */
17    foreach u ∈ Adj[v[i]] do
18       Egrad[u] = Egrad[u]-1;
19       if Egrad[u] = 0 then
20          Q = enqueue(Q,u);
21       end
22    end
23 end
```



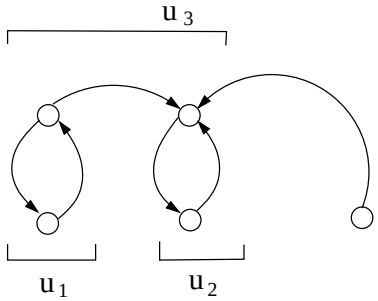
Q	U = (v[1], ...)
1	∅
2,4	1
4,3	1,2
3,7,5	1,2,3
⋮	

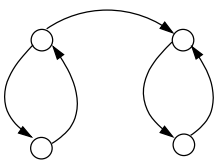


Q	U
1	∅
4	1
7	1,4
8	1,4,7
∅	1,4,7,8

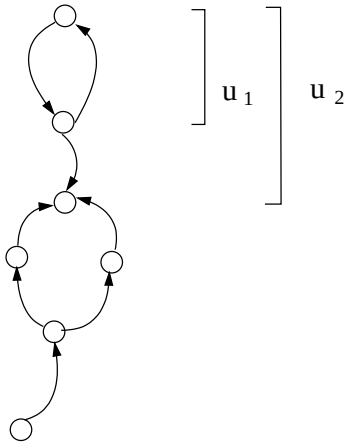


$G = (V, E)$. Für $U \subseteq V$ ist $G_U = (U, F), F = \{(u, v) \in E \mid u, v \in U\}$ der auf U induzierte Graph. Uns interessieren die $U \subseteq V$, so dass in G_U jeder $Egrad \geq 1$ ist. Seien $U_1, \ldots, U_k$ alle U_i, so dass in G_{U_i} jeder $Egrad \geq 1$ ist. Dann gilt auch in $G_{U_1 \cup \ldots \cup U_k} = G_X$ ist jeder $Egrad \geq 1$. Das ist der größte Graph mit dieser Eigenschaft. Am Ende von TopSort bleibt dieser Graph übrig ($X = \emptyset$ bis $X = V$ möglich).



$G_{U_1} \cup G_{U_2} \cup G_{U_3} = G_{U_3} =$ 

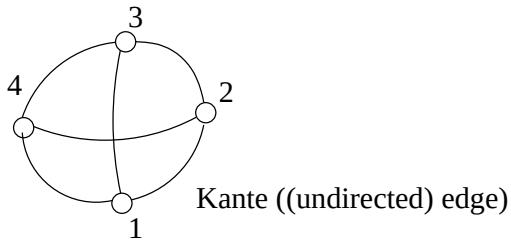
Größter induzierter Teilgraph, wobei jeder $Egrad \geq 1$ ist.



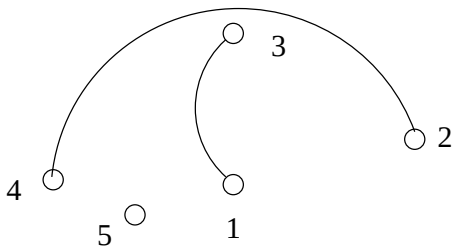
$G_{U_1 \cup U_2} = G_{U_2}$

2 Ungerichtete Graphen

Ein typischer ungerichteter Graph:



Auch einer:

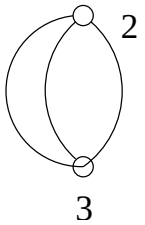


ungerichteter Graph G_2 mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $E = \{\{4, 2\}, \{1, 3\}\}$

Beachte:

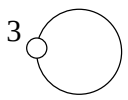
Ungerichtet, deshalb Kante als Menge, $\{4, 2\} = \{2, 4\}$. (Manchmal auch im ungerichteten Fall Schreibweise $(4, 2) = \{4, 2\}$, dann natürlich $(4, 2) = (2, 4)$. *Nicht* im gerichteten Fall!)

Wie im gerichteten Fall gibt es keine Mehrfachkanten:



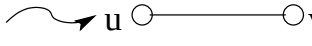
$(3, 2)_1, (3, 2)_2, (3, 2)_3 \in E$ hier nicht erlaubt

und keine Schleifen



Definition 2.1(ungerichteter Graph): *Ein ungerichteter Graph besteht aus 2 Mengen:*

- *V, beliebige endliche Menge von Knoten*
- *$E \subseteq \{\{u,v\}|u,v \in V, u \neq v\}$, Kanten*

Schreibweise $G = (V,E), \{u,v\}$ 

.

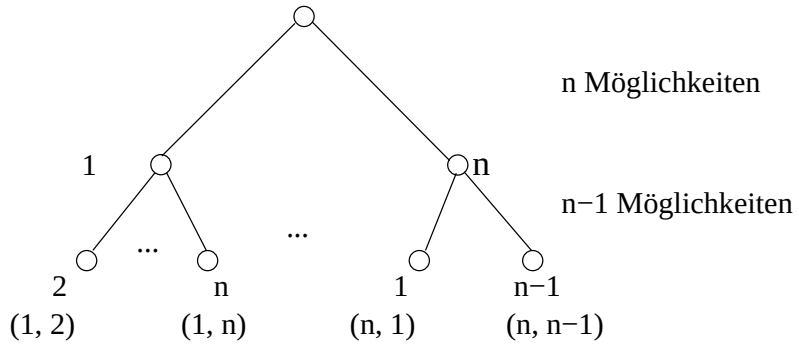
Folgerung 2.1: *Ist $|V| = n$ fest.*

a) Jeder ungerichtete Graph mit Knotenmenge V hat $\leq \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Kanten.

b) # ungerichtete Graphen über $V = 2^{\binom{n}{2}}$. (# gerichtete Graphen: $2^{n(n-1)}$)

Beweis.

a) „Auswahlbaum “



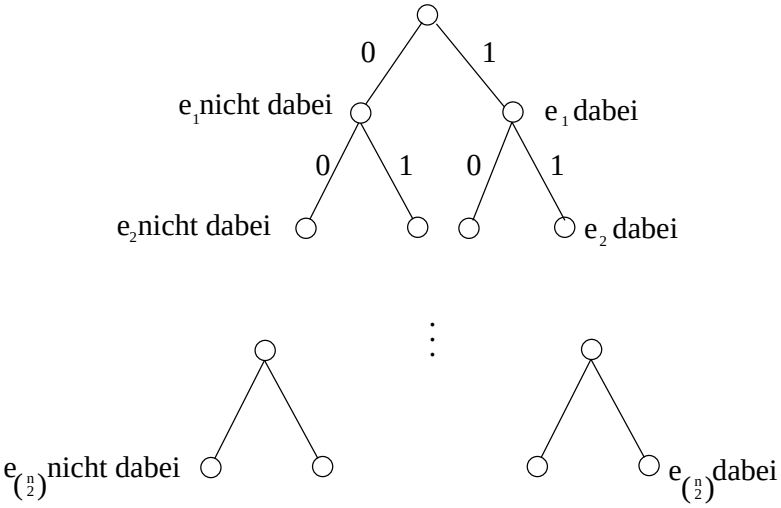
$n(n-1)$ Blätter. Blatt $\Longleftrightarrow (u,v), u \neq v$.
Kante $\{u,v\} \Longleftrightarrow$ 2 Blätter,(u,v) und (v,u).
$\Rightarrow$Also $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Möglichkeiten.

b) Graph = Teilmenge von Kanten
Alle Kanten: $e_1, e_2, \ldots, e_{\binom{n}{2}}$. Jedes Blatt $\Leftrightarrow$ 1 ungerichteter Graph.
Schließlich $2^{\binom{n}{2}}$ Blätter.
Alternativ: Blatt $\Longleftrightarrow$ 1 Bitfolge der Länge $\binom{n}{2}$.
Es gibt $2^{\binom{n}{2}}$ Bitfolgen der Länge $\binom{n}{2}$.
Beachte: $\binom{n}{2}$ ist $O(n^2)$.

□

Adjazent, inzident sind analog zum gerichteten Graph zu betrachten.

$Grad(u) = \{\{u,v\}|\{u,v\} \in E\}$, wenn $G = (V,E)$. Es gilt immer $0 \leq Grad(u) \leq n-1$.

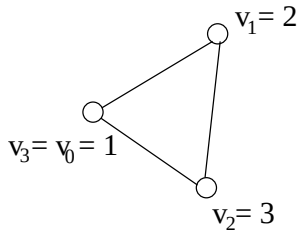


Weg $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ wie im gerichteten Graphen.
Länge $(v_0, v_1, \ldots, v_k) = k$
Auch ein Weg ist bei $\{u, v\} \in E$ der Weg (u, v, u, v, u, v).
Einfach $\Longleftrightarrow$ $v_0, v_1, \ldots, v_k$ alle verschieden, d.h., $|\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}| = k + 1$
$(v_0, \ldots v_k)$ geschlossen $\Longleftrightarrow$ $v_0 = v_k$

$(v_0, \ldots, v_k)$ ist Kreis, genau dann wenn:

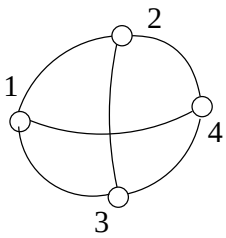
- $k \geq 3$(!)
- $(v_0, \ldots, v_{k-1})$ einfach
- $v_0 = v_k$

$(1, 2, 1)$ wäre kein Kreis, denn sonst hätte man immer einen Kreis. (1, 2, 3, 1) jedoch ist



ein solcher mit $v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 1 = v_0$.

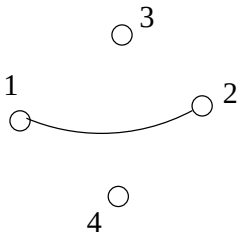
Adjazenzmatrix, symmetrisch (im Unterschied zum gerichteten Fall)



G_1

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

symmetrisch $\Longleftrightarrow a_{u,v} = a_{v,u}$



G_2

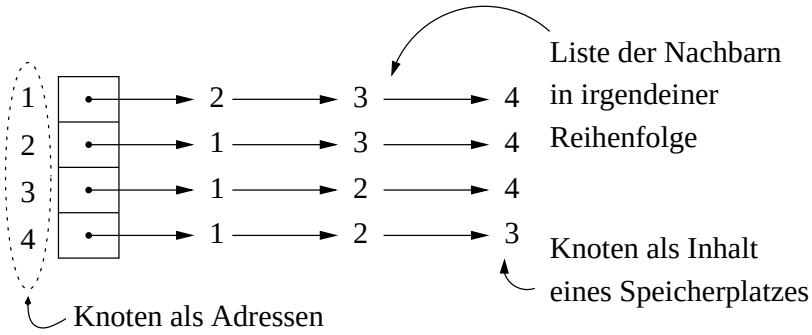
	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Darstellung als Array:

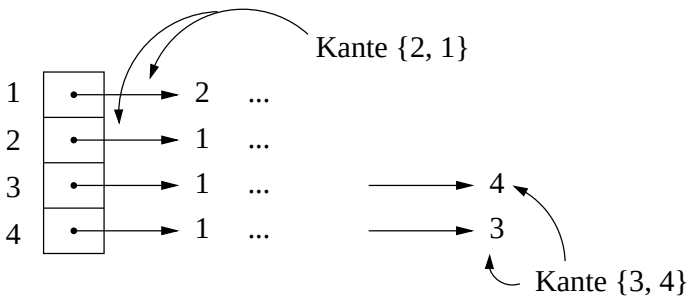
n^2Speicherplätze

Adjazenzlistendarstellung:

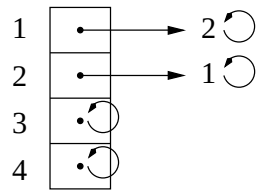
Array Adj von G_1



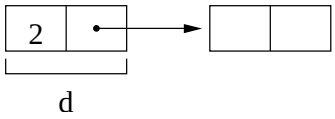
Jede Kante zweimal dargestellt, etwa:



Adjazenzlistendarstellung von G_2:



Platz zur Darstellung von $G = (V, E) : c + n + d \cdot 2 \cdot |E|$
$c \ldots$ Initialisierung, $n \ldots$ Array Adj, $d \cdot 2 \cdot |E| \ldots$ jede Kante zweimal, d etwa 2:



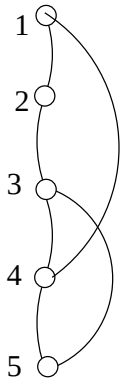
$O(|E|)$, wenn $|E| \geq \frac{n}{2}$.
$|E|$ Kanten sind inzident mit $\leq 2|E|$ Knoten.
Adjazenzlisten in Array wie im gerichteten Fall.

2.1 Algorithmus Breitensuche (BFS)

BFS(G, s) genau wie im gerichteten Fall
Eingabe: G in Adjazenzlistendarstellung
Datenstrukturen: Schlange $Q[1 \ldots n]$, Array $col[1 \ldots n]$

```
1  foreach u ∈ V do
2     col[u]=weiß;
3  end
4  col[s]=grau;
5  Q=s;
6  while q≠ ∅ do
7     u=Q[head];                              /* u wird expandiert */
8     foreach v∈Adj[u] do                   /* {u,v} wird expandiert */
9        if col[v]=weiß then                   /* v wird expandiert */
10          col[v]=grau;
11          v in Schlange setzen;
12       end
13       u aus Q raus;
14       col[u]=schwarz;
15    end
16 end
```

G =



BFS (G, 1)

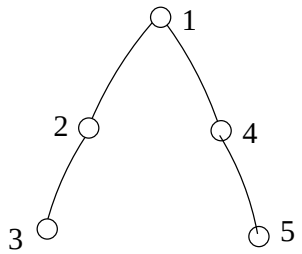
1	
2 4	{1, 2} als (1, 2), col[2] = w
4 3	{1, 2} als (2,1), col[1] = s
3 5	{4, 3}, col[3] = g
5	{4, 3}, col[4] = s
Ø	

Beobachtung
Sei $\{u, v\}$ eine Kante.

a) Die Kante u, v wird genau zweimal durchlaufen, einmal von u aus, einmal von v aus.

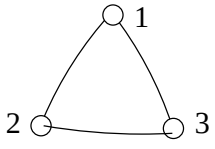
b) Ist der erste Lauf von u aus, so ist zu dem Zeitpunkt $col[v] = w$ oder $col[v] = g$. Beim zweiten Lauf ist dann jedenfalls $col[u] = s$.

Breitensuchbaum durch $\pi[1, \ldots, n]$, Vaterarray.
Hier



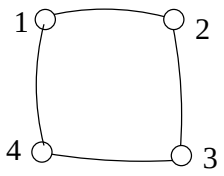
$\pi[3] = 2, \pi[2] = 1, \pi[4] = 1, \pi[5] = 4$.
Entdecktiefe durch $d[1 \ldots n].\pi[v], d[v]$ werden gesetzt, wenn v entdeckt wird.

Wir können im ungerichteten Fall erkennen, ob ein Kreis vorliegt:



Q
1
2 3
3

Beim (ersten) Gang durch $\{2, 3\}$ ist $col[3] = grau$, d.h. $3 \in Q$.

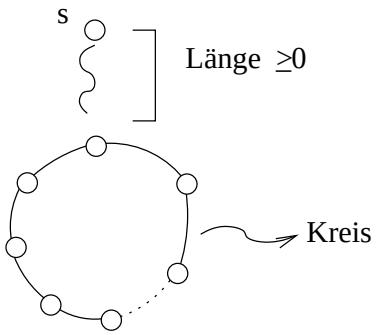


Q
2
1 3
3 4
4

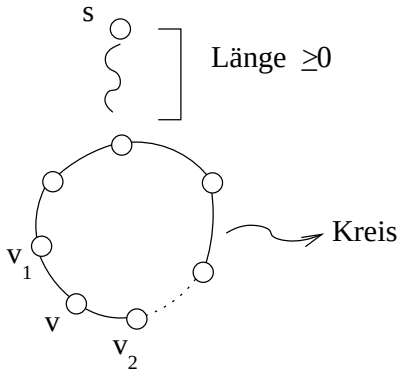
Beim (ersten) Gang durch $\{3, 4\}$ ist $col[4] = grau$, d.h. $4 \in Q$.

Satz 2.1: *$G = (V, E)$ hat einen Kreis, der von s erreichbar ist $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Kante $e = \{u, v\}$, so dass $BFS(G, s)$ beim (ersten) Gang durch e auf einen grauen Knoten stößt.*

Beweis.
„$\Rightarrow$“ Also haben wir folgende Situation in G:



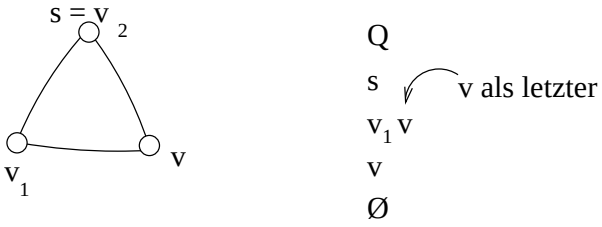
Sei v der Knoten auf dem Kreis, der als letzter (!) entdeckt wird.



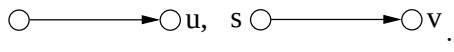
v_1, v_2 die beiden Nachbarn von v auf dem Kreis, $v_1 \neq v_2$ (Länge ≥ 3).
In dem Moment, wo v entdeckt wird, ist $col[v_1] = col[v_2] = grau$.
(schwarz kann nicht sein, da sonst v vorher bereits entdeckt, weiß nicht, da v letzter.)

1. Fall v über v_1 entdeckt, dann $Q = \ldots v_2 \ldots v$ nach Expansion von v_1. (Ebenso v_2.)

2. Fall v über $u \neq v_1, u \neq v_2$ entdeckt. Dann $Q = v_1 \dots v_2 \dots v$ nach Expansion von u.

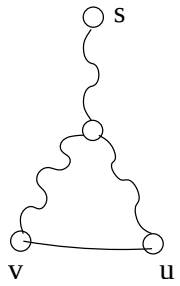


"$\Leftarrow$" Also bestimmen wir irgendwann während der Breitensuche die Situation $Q = u \dots v \dots$ und beim Gang durch $\{u, v\}$ ist v grau. Dann ist $u \neq s, v \neq s$.

Wir haben Wege 

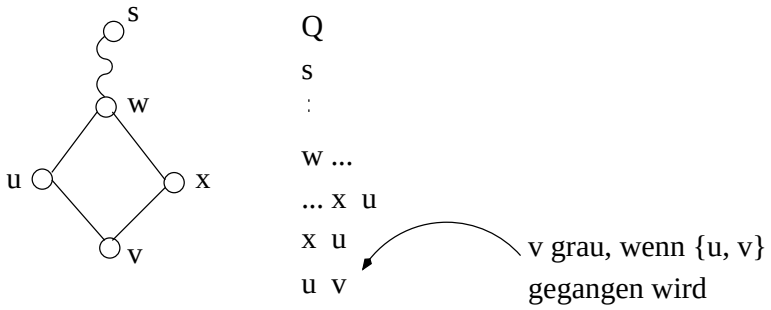
.

Dann im Breitensuchbaum der Suche



Also einen Kreis. Etwas formaler:
Haben Wege $(v_0 = s, \dots, v_k = v), (w_0 = s, \dots, w_k = u)$ und $v \neq u, v \neq s$. Gehen die Wege von v und u zurück. Irgendwann der erste Knoten gleich. Da Kante $\{u, v\}$ haben wir einen Kreis. $\square$

Beachten nun den Fall



Also $d[v] = d[u] + 1$. Also nicht immer $d[v] = d[u]$, wenn v grau ist beim Gang durch u.

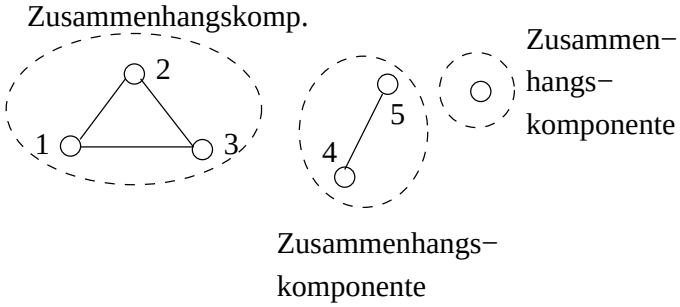
Definition 2.2(Zusammenhang): *Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph*

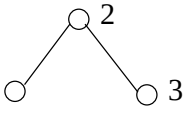
a) G heißt zusammenhängend, genau dann, wenn es für alle $u, v \in V$ einen Weg (u, v) gibt.

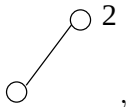
b) Sei $H = (W, F)$, $W \subseteq V, F \subseteq E$ ein Teilgraph. H ist eine Zusammenhangskomponente von G, genau dann, wenn

- *F enthält alle Kanten $\{u, v\} \in E$ mit $u, v \in W$ (H ist der auf W induzierte Teilgraph)*
- *H ist zusammenhängend.*
- *Es gibt keine Kante $\{u, v\} \in E$ mit $u \in W, v \notin W$.*

Man sagt dann: H ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph.

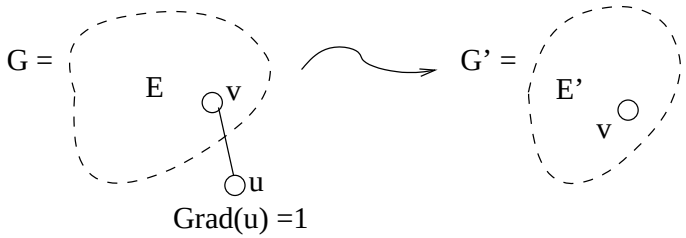


Beachte: In obigem Graphen ist  keine Zusammenhangskomponente,

da $\{1, 3\}$ fehlt. Ebenso wenig ist es  , da nicht maximaler Teilgraph, der zusammenhängend ist.

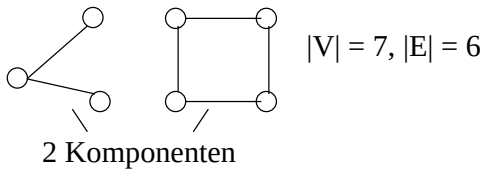
Satz 2.2: *Ist $G = (V, E)$ zusammenhängend. Dann gilt: G hat keinen Kreis $\Longleftrightarrow$ $|E| = |V| - 1$*

Beweis.
„$\Rightarrow$“ Induktion über $n = |V|$.
$n = 1$, dann ○, also $E = \emptyset$.
$n = 2$, dann ○——○, also ✓ . Sei $G = (V, E), |V| = |V| = n + 1$ und ohne Kreis. Da G zusammenhängend ist und ohne Kreis, gibt es Knoten vom $Grad = 1$ in G.
Wären alle Grade ≥ 2, so hätten wir einen Kreis. Also:

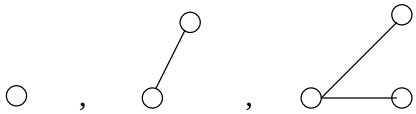


Dann gilt für $G' = (V', E')$:
G hat einen Kreis $\Rightarrow$ G' hat keinen Kreis
$\Rightarrow$ Induktionsvoraussetzung
$|E'| = |V'| - 1$
$\Rightarrow |E| = |V| - 1$

„$\Leftarrow$“ Beachte zunächst, dass die Aussage für G nicht zusammenhängend nicht gilt:



Also wieder Induktion über $n = |V|$. $n = 1, 2, 3$, dann



die Behauptung gilt.
Sei jetzt $G = (V, E)$ mit $|V| = n + 1$ zusammenhängend und $|E| = |V|$. Dann gibt es Knoten vom $Grad = 1$. Sonst

$$\sum_v Grad(v) \geq 2(n+1) = 2n + 2,$$

also $|E| \geq n + 1 \left((|E| = \frac{1}{2} \sum_v Grad(v) \right)$
Einziehen von Kante und Löschen des Knotens macht Induktionsvoraussetzung anwendbar. □

Folgerung 2.2:

a) Ist $G = (V, E)$ Baum, so ist $|E| = |V| - 1$.

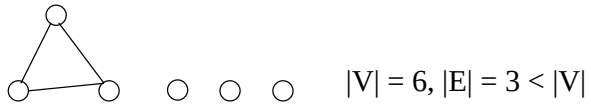
b) Besteht $G = (V, E)$ aus k Zusammenhangskomponenten, so gilt: G ist kreisfrei $\Longleftrightarrow |E| = |V| - k$

Beweis.

a) Baum kreisfrei und zusammenhängend.

b) Sind $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ die Zusammenhangskomponenten von G. (Also insbesondere $V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_k = V$, $E_1 \dot\cup \ldots \dot\cup E_k = E$.) Dann gilt G_i ist kreisfrei $\Leftrightarrow |E_i| = |V_i| - 1$ und die Behauptung folgt.

Beachte eben



trotzdem Kreis

□

2.2 Algorithmus (Finden von Zusammenhangskomponenten)

Eingabe: $G = (V, E)$ ungerichtet, Ausgabe: Array A[1..$|V|$] mit A[u] = A[v] $\Longleftrightarrow$ u, v in einer Komponente
(Frage: Ist u von v erreichbar? In einem Schritt beantwortbar.)

```
1 A auf Null initialisieren;
2 Initialisierung von BFS;
3 foreach w ∈ V do
4    if colour[w]==weiß then
5       BFS(G,w) modifiziert, so dass Initialisierung aber A[u]=w,
        falls u im Verlauf entdeckt wird;
6    end
7 end
```