Traveling Salesman Problem

Wir betrachten die Branch-and-Bound-Schranken $S_1, \ldots, S_4$ aus der Vorlesung für das TSP.

- N Orte (als Knoten), die besucht werden sollen.
- Startknoten = Endknoten
- Kosten, um von Knoten A zu Konten B zu kommen.
- Matrix M mit Kosten: Ausprobieren, um Rundreise zu finden
  - Kante (u, v) dabei $\Rightarrow$ neue Matrix M'

$$\begin{aligned} M'(u,v) &= M(u,v) \\ M'(u, w \neq v) &= \infty \\ M'(x \neq u, v) &= \infty \end{aligned}$$

  - Kante (u, v) nicht dabei $\Rightarrow$ neue Matrix M'

$$M'(u,v) = \infty, \quad \text{sonst wie } M$$

$\Rightarrow$ Aufhören, wenn in jeder Zeile bzw. Spalte genau 1 Wert $\neq \infty$.

- gesucht: untere Schranke S

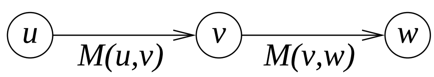
  (Keine Lösung kann besser sein, als Schranke S. Suche zuerst bei kleineren Schranken. Wenn die gefundene Lösung kleiner ist als die Schranke in noch nicht betrachteten Zweigen $\Rightarrow$ Ende.)

Schranken

- $S_1(M)$ = minimale Rundreise auf Matrix M

  $\Rightarrow$ beste untere Schranke, aber schwer zu bestimmen.
- $S_2(M)$ = Summe der Kosten der bisher gewählten Kanten.
- $S_3(M) = \sum_v \min \{M(u,v) + M(v,w) | u, w \in V\}$

  Jeder Knoten muss besucht werden, d.h. jeder Knoten wird betreten und verlassen. (Das gilt für alle $v \in V$.)



$\Rightarrow$ Jede Kante wird 2 mal gezählt: $\sum \leq 2 * K(R)$ (Kosten einer Rundreise). Zu v hin kann es Kanten mit geringeren Kosten und von v weg kann es Kanten mit geringeren Kosten als in der Rundreise verwendet werden geben.

$\Rightarrow$ Das gilt für alle Rundreisen, also auch für die minimale Rundreise.

$$\sum_v \min \{M(u,v) + M(v,w) | u,w \in V\} \leq 2 * K(R \text{ optimal})$$

$S_3(M)$ - Betrachte beliebige Matrix M
(Zeilen und Spalten durchgehen $\Rightarrow$ kann Rundreise ergeben, muß aber nicht.)

$$M_1 = \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

In M_1 ergibt die Auswahl von S_3 eine Rundreise (sogar eine minimale). Dabei wird jedes $\bullet$ zweimal getroffen. Die Auswahl in M_2 stellt offensichtlich keine Rundreise dar, aber eine untere Schranke.

Wie sieht eine Rundreise aus? Jeder Knoten v muss betreten und verlassen werden. Also in jeder Zeile genau einer ausgewählt ($\rightarrow$ betreten) und in jeder Spalte auch genau einer ausgewählt ($\rightarrow$ verlassen). Außerdem darf man, wenn man an einer beliebigen stelle einsteigt, erst nach n Schritten wieder am Startpunkt sein.

$$M_3 = \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix}$$

M_3 erfüllt die erste Bedingung, die zweite aber nicht!

Zur Schranke S_4 Wir betrachten das *Verlassen des Knotens*. Wir verlassen den Knoten immer über die kleinste Kante $\Rightarrow$ *Minimum in den Zeilen*. Die Argumentation funktioniert analog auch für das Betreten der Knoten ($\rightarrow$ Minimum in den Spalten).

$$z_1, \ldots, z_n \quad \text{Minima der Zeilen } 1, \ldots, n$$

$$K(R) \geq z_1 + \ldots + z_n \quad \text{Kosten der Rundreise}$$

Jetzt kann es sein, dass noch nicht jede Spalte getroffen wurde (siehe oben). Wir können die Schranke also noch verbessern.

$$M_4 = \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix}$$

Wir bilden $\widehat{M}$ aus M, indem in jeder Zeile i ds Minimum z_i abgezogen wird. Eine Rundreise in $\widehat{M}$ ist auch eine Rundreise im M.

$$K(R_M) = \underbrace{K(R_{\widehat{M}})}_{\geq 0} + z_1 + \ldots + z_n$$

Jetzt brauchen wir noch eine Schranke für $\widehat{M}$. In den Zeilen von $\widehat{M}$ ist schon mindestens eine 0, in Spalten eventuell noch Einträge > 0.

$\Rightarrow$ Verfahren wie oben dann, nur mit Spalten.

$$s_1 + \ldots + s_n \quad \text{Minma der Spalten } 1, \ldots, n$$

$$\widehat{\widehat{M}} = \widehat{M} \quad \text{in jeder Spalte } i \text{ Minimum } s_i \text{ aus } \widehat{M} \text{ abziehen.}$$

Eine Rundreise in $\widehat{\widehat{M}}$ ist auch eine Rundreise in M.

$$\begin{aligned} K(R_{\widehat{M}}) &= \underbrace{K(R_{\widehat{\widehat{M}}})}_{\geq 0} + \underbrace{z_1 + \ldots + z_n}_{\text{aus } M} + \underbrace{s_1 + \ldots + s_n}_{\text{aus } \widehat{M}} \\ K(R_M) &\geq \underbrace{z_1 + \ldots + z_n + s_1 + \ldots + s_n}_{=S_4(M)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie für $i = 1, 2, 3$ $S_i(M) = S_i(M^T)$, wobei M^T die zu M transponierte Matrix ist.

Matrix M und transponierte Matrix

$$M^T : M^T(u, v) = M(v, u)$$

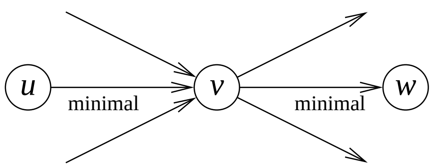
Im Graphen werden alle Kanten umgedreht: Kante $(u, v) \to (v, u)$
Rundreise in M kann zu einer Rundreise in M^T umgewandelt werden. Zum Beispiel $R_M = (1, 2, 3, 4, 1)$ wird zu $R_{M^T} = (1, 4, 3, 2, 1)$. Knoten werden einfach in umgekehrter Reihenfolge besucht.

$\mathbf{S_1(M) = S_1(M^T)}$ Die Kosten bleiben bei dieser Konstruktion gleich. $K(R_M) = K(R_{M^T})$ Das gilt für jede Rundreise, also auch für die minimale. Damit ist auch $S_1 = S_1(M^T)$.

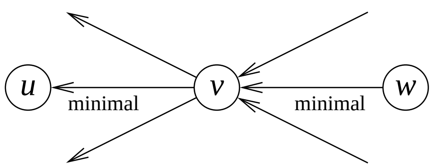
$\mathbf{S_2(M) = S_2(M^T)}$ Für jede Rundreise in M bei der die Kante (u, v) ausgewählt wird, existiert eine Rundreise in M^T bei der die kante (v, u) ausgewählt wird. Beim transponieren der Matrix wird an den Kosten nichts geändert, also ist auch $S_2(M) = S_2(M^T)$ füe jede mögliche auswahl von Kanten.

$\mathbf{S_3(M) = S_3(M^T)}$

$$S_3(M) = \frac{1}{2} \sum_v min \{M(u, v) + M(v, w) | u, w \in V\}$$



Kanten umdrehen (M^T):

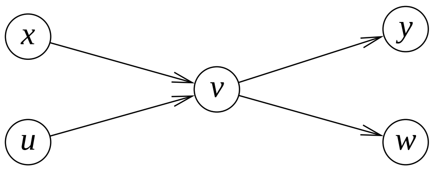


Für einen bestimmten Knoten v ändert sich $\min\{M(u,v)+M(v,w)|u,v,w \in V\}$ nicht. Da das für alle Knoten gilt, kann sich $S_3(M)$ auch nicht ändern.

$$
\begin{aligned}
S_3(M^T) &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M^T(u,v) + M^T(v,w)|u,w \in V\} \\
&\quad \text{mit } M^T(u,v) = M(u,v) \\
&= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M(v,u) + M(w,v)|u,w \in V\} = S_3(M) \\
&\quad (u \text{ und } w \text{ sind beliebige Knoten, damit vertauschbar})
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie $S_2(M) \leq S_3(M) \leq S_1(M)$

$\mathbf{S_3(M) \leq S_1(M)}$ Wir nehmen an, dass $S_3(M) > S_1(M)$ gilt und betrachten die minimale Rundreise $R = (\ldots, u, v, w, \ldots)$.



Damit $S_3 > S_1$ werden kann, muss folgendes gelten.

Es muss ein x oder ein y mit

$$M(x,v) > M(u,v) \quad \text{oder} \quad M(v,y) > M(v,w)$$

geben und (x,v) oder (v,y) müssen von S_3 gewählt werden. Wenn z.B. so ein x existiert, dann ist

$$M(x,v) + M(v,w) > M(u,v) + M(v,w).$$

Das steht im Widerspruch zur Berechnungsvorschrift, die das x immer so wählt, dass sich ein Minimum ergibt. Die anderen Fälle sind analog.
Also ist $S_3(M) \leq S_1(M)$.

$\mathbf{S_2(M) \leq S_3(M)}$ Wir überlegen zunächst, wann $S_2(M) = S_3(M)$ gilt.

n Kanten wurden zu einer Rundreise ausgewählt. In jeder Zeile und in jeder Spalte genau 1 Eintrag $\neq \infty$.

$$M = \begin{pmatrix} \infty & m_1 & \infty & \infty & \dots & \infty \\ m_2 & \infty & \infty & \infty & \dots & \dots \\ \infty & \dots & m_3 & \dots & \dots & \dots \\ \infty & \dots & \infty & \infty & \dots & \dots \\ \infty & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \infty & \infty & \dots & \dots & m_n & \dots \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$S_2(M) = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Und für $S_3(M)$ gilt

$$S_3(M) = \frac{1}{2}(m_n + m_1 + m_1 + \ldots + m_n) = S_2(M).$$

Das funktioniert als Induktionsanfang. Wir machen eine Induktion über die Anzahl k der noch nicht ausgewählten Kanten.

Für $k = 0$ gilt die Behauptung $S_3(M) \geq S_2(M)$ (siehe oben).
Betrachte einen Schnitt vorher. Es sind $k-1$ Kanten sind ausgewählt und nach Voraussetzung gilt $S_3(M) \geq S_2(M)$.
In diesem Schritt wurde die Kante (u, v) gewählt.

$$\begin{aligned} M_k &\rightarrow \text{ Matrix Kante } (u,v) \text{ schon gewählt} \\ M_{k-1} &\rightarrow \text{ Matrix Kante } (u,v) \text{ noch nicht gewählt} \\ m_k := M(u,v) &\rightarrow \text{ Gewicht der gewählten Kante} \end{aligned}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} & \infty & & \\ \infty & m_k & \infty & \infty \\ & \infty & & \\ & \infty & & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{k-1} = \begin{pmatrix} & ? & & \\ ? & m_k & ? & ? \\ & ? & & \\ & ? & & \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} S_2(M_{k-1}) &= S_2(M_k) - m_k \quad \text{Kante vom Weg entfernt} \\ S_3(M_{k-1}) &= S_3(M_k) - (\text{Differenz aus } m_k \text{ und den neuen Minima,} \\ &\qquad \text{die sich aus den ? für alle Knoten ergeben können)} \\ &\geq S_3(M_k) - \frac{1}{2}\underbrace{\Big(m - \min\{M_{k-1}(u,w) | w \in V\} + m - \min\{M_{k-1}(x,v) | x \in V\}\Big)}_{\text{(nur bezogen auf Zeile } u \text{ und Spalte } v)} \\ &\geq S_3(M_k) - m_k. \qquad (\text{Da } \min M_{k-1}(u,\cdot) \text{ und } \min M_{k-1}(\cdot,v) \leq m) \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{array}{rcll}
S_3(M_k) & \geq & S_2(M_k) & |\text{(nach Voraussetzung)} \\
S_3(M_k) - m_k & \geq & S_2(M_k) - m_k & | - m_k \\
S_3(M_k) - m_k & \geq & S_2(M_{k-1}) & |\text{(nach Ind.-Schritt)} \\
S_3(M_{k-1}) & \geq & S_2(M_{k-1}) & |\text{(nach Ind.-Schritt, da } S_3(M_{k-1}) \geq S_3(M_k) - m_k)
\end{array}$$

Zeigen Sie $\mathbf{S_3(M)} \leq \max\{\mathbf{S_4(M)}, \mathbf{S_4(M^T)}\}$

Zu zeigen ist, dass $S_3(M) \leq \max\{S_4(M), S_4(M^T)\}$ gilt. Dazu betrachten wir zunächst die Schranke S_3 für M und M^T.

$$\begin{aligned}
S_3(M) &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M(u,v) + M(v,w) | u,w \in V\} \\
S_3(M^T) &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M^T(u,v) + M^T(v,w) | u,w \in V\}
\end{aligned}$$

Aus $M^T(u,v) := M(v,u)$ folgt nun für $S_3(M^T)$:

$$\begin{aligned}
S_3(M^T) &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M^T(u,v) + M^T(v,w) | u,w \in V\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M(v,u) + M(w,v) | u,w \in V\} \\
&= S_3(M)
\end{aligned}$$

Wir betrachten weiterhin die Summe aus $S_3(M)$ und $S_3(M^T)$.

$$\begin{aligned}
S_3(M) + S_3(M^T) &= S_3(M) + S_3(M) \\
2S_3(M) &= \sum_v \min\{M(u,v) + M(v,w) | u,w \in V\} \\
&= \sum_v (\min\{M(u,v) | u \in V\} + \min\{M(v,w) | w \in V\}) \\
&= \underbrace{\sum_v \min\{M(u,v) | u \in V\}}_{\text{Minimum der Spalte } v} + \underbrace{\sum_v \min\{M(v,w) | w \in V\}}_{\text{Minimum der Zeile } v}
\end{aligned}$$

Für die Schranke S_4 gilt nach der Bestimmung der Zeilenminima folgendes:

$$S_4(M) = \underbrace{\sum_v \min\{M(v,w) | w \in V\}}_{\text{Minimum der Zeile } v} + S_4'(\widehat{M})$$

$$\begin{aligned} S_4(M^T) &= \sum_v \min\{M^T(v,u) | u \in V\} + S_4'(\widehat{M^T}) \\ &= \underbrace{\sum_v \min\{M(u,v) | u \in V\}}_{\text{Minimum der Spalte } v} + S_4'(\widehat{M^T}) \end{aligned}$$

$S_4'(\widehat{M})$ bezeichnet den Teil von S_4, bei dem die Minima der Spalten in $\widehat{M}$ gebildet werden. Daraus folgt für die Summe aus $S_4(M)$ und $S_4(M^T)$:

$$\begin{aligned} S_4(M) + S_4(M^T) &= \sum_v \min\{M(v,w) | w \in V\} + S_4'(\widehat{M}) \\ &\quad + \sum_v \min\{M(u,v) | u \in V\} + S_4'(\widehat{M^T}) \\ &= 2 \cdot S_3(M) + \underbrace{S_4'(\widehat{M}) + S_4'(\widehat{M^T})}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$S_4(M) + S_4(M^T) \geq 2S_3(M)$$

Ersetzt man jetzt $S_4(M)$ bzw. $S_4(M^T)$ durch das größere von beidem, so erhält man

$$2\max\{S_4(M), S_4(M^T)\} \geq 2S_3(M)$$

und damit

$$S_3(M) \leq \max\{S_4(M), S_4(M^T)\}.$$