Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2011/2012
13.01.2012

Theorie der Programmiersprachen

10. Übung

1. Aufgabe: Beweisen Sie mittels Grundresolution *und* mittels prädikatenlogischer Resolution die Unerfüllbarkeit der folgenden Formel F

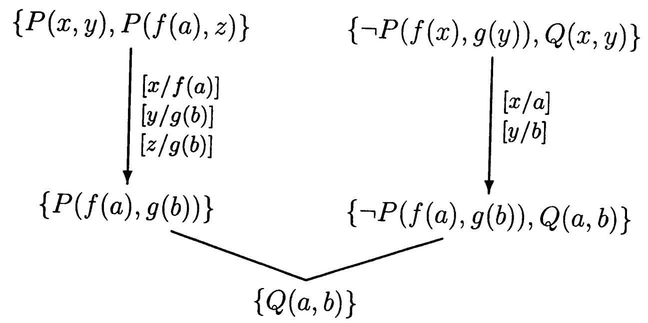
$$F = \forall x \, \forall y \, ((\neg P(x) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(y)) \wedge P(y) \wedge (\neg P(g(b,x)) \vee \neg Q(b)))\,.$$

Gegeben sei die Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ mit $P^{\mathcal{A}} = \{x \in D(F) | \text{ Term } x \text{ enthält } g\ \}$ und $Q^{\mathcal{A}} = \{x \in D(F) | x \neq b, x \neq a \ (x \text{ keine Konstante})\}$. Zeigen Sie durch „Hochgehen“ im Beweis, dass $\mathcal{A}$ kein Modell für F ist.
Wiederholen Sie den Zusammenhang zur Herbrandexpansion. Geben Sie $E(F)$ an und zeigen Sie, dass eine endliche Teilmenge von $E(F)$ existiert, die unerfüllbar ist.

2. Aufgabe: Geben Sie (bis auf Variablenumbenennungen) alle prädikatenlogischen Resolventen der beiden Klauseln K_1 und K_2 an.

$$K_1 = \{\neg P(x,y), \neg P(f(a), g(u,b)), Q(x,u)\}$$
$$K_2 = \{P(f(x), g(a,b)), \neg Q(f(a), b), \neg Q(a,b)\}$$

3. Aufgabe: Gegeben sei folgende Grundresolution



Vollziehen Sie im Beweis des Lifting-Lemmas nach, welche prädikatenlogische Resolution hieraus entsteht.

4. Aufgabe: Bei endlichen aussagenlogischen Klauselmengen F ist $Res^*(F)$ immer eine endliche Menge. Man gebe eine endliche prädikatenlogische Klauselmenge F an, so dass für alle n gilt:

$$Res^n(F) \neq Res^*(F).$$

5. Aufgabe: Wir betrachten den mathematischen Begriff der Gruppe mit einer zweistelligen Operation $\circ$. Mit dem Prädikat $P(x, y, z)$ drücken wir aus, dass $x \circ y = z$ gilt. Dann können die Gruppenaxiome durch folgende prädikatenlogische Formel dargestellt werden:

1. $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$
   (Abgeschlossenheit)
2. $\forall u \forall v \forall w \forall x \forall y \forall z\, ((P(x, y, u) \wedge P(y, z, v)) \rightarrow (P(x, v, w) \leftrightarrow P(u, z, w)))$
   (Assoziativität)
3. $\exists x\, (\forall y P(x, y, y) \wedge \forall y \exists z P(z, y, x))$
   (Existenz eines links-neutralen Elementes und Existenz von Links-Inversen)

Aus den oben prädikatenlogisch formulierten Gruppenaxiomen folgere man mittels Resolutionskalkül:

(a) Falls G eine abelsche Gruppppe ist (d. h. es gilt zusätzlich das Kommutativgesetz), dann gilt für alle x, y in G, dass $x \circ y \circ x^{-1} = y$.

(b) Betrachten Sie das Beispiel zwischen Übung 83 und Übung 84 im Buch. Vollziehen Sie den Resolutionsbeweis nach. Betrachten Sie die beiden Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit

$$
\begin{aligned}
&U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{B}} = \{0, 1, 2\} \\
&e^{\mathcal{A}} = e^{\mathcal{B}} = 0 \\
&P^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{B}} = \{(x, y, z) | (x + y) \equiv z \mod 3\} \\
&i^{\mathcal{A}}(0) = i^{\mathcal{B}}(0) = k^{\mathcal{A}}(0) = k^{\mathcal{B}}(0) = 0 \\
&i^{\mathcal{A}}(1) = k^{\mathcal{A}}(1) = 2 \\
&i^{\mathcal{A}}(2) = k^{\mathcal{A}}(2) = 1 \\
&i^{\mathcal{B}}(1) = k^{\mathcal{B}}(1) = 0 \\
&i^{\mathcal{B}}(2) = k^{\mathcal{B}}(2) = 0.
\end{aligned}
$$

Gehen Sie im Beweis hoch, bis Sie zu einer Klausel kommen, die in der jeweilgen Interpretation falsch ist.