Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU CHEMNITZ
Wintersemester 2011/2012
06.12.2011

Theorie der Programmiersprachen

7. Übung

1. Aufgabe: Man zeige, dass folgendes Korrespondenzproblem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 001 & x_2 = 01 & x_3 = 01 & x_4 = 10 \\ y_1 = 0 & y_2 = 011 & y_3 = 101 & y_4 = 001 \end{array}$$

Achtung: die kürzeste Lösung besteht aus 66 Indizes. Ohne Computereinsatz kann man dieses Problem jedoch auch „von Hand" lösen, wenn man die Lösung rückwärts aufbaut. *Hinweis:* offensichtlich ist der letzte Index $i_{66} = 3$, da nur x_3 und y_3 eine gemeinsame abschließende Bitfolge (01) haben.

2. Aufgabe: Gegeben sei das Post'sche Korrespondenzproblem $(x_1, y_1) = (1, 11)$.

(a) Geben Sie dazu die Formel F analog zur Vorlesung an (vgl. Beweis der Unentscheidbarkeit des Gültigkeitsproblems in der Prädikatenlogik).

(b) Geben Sie eine Herbrand-Interpretation für die Formel F an.

(c) Geben Sie eine Herbrand-Struktur an, die kein Modell für F ist.

3. Aufgabe: Man zeige, dass das Post'sche Korrespondenz-Problem über dem einelementigen Alphabet entscheidbar ist.
Hinweis: Ist das Post'sche Korrenspondenzproblem $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ gegeben, so gibt es keine Lösung, falls

$$\left[|x_i| \gneqq |y_i| \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \right]$$

gilt. Dabei bezeichne $|\cdot|$ die Anzahl der Zahlen bzw. Zeichen.

4. Aufgabe: Man zeige, dass das Gültigkeitsproblem (und damit auch das Erfüllbarkeitsproblem) der Prädikatenlogik bereits für Formeln ohne Funktionssymbole unentscheidbar ist.

5. Aufgabe: Man zeige, dass die folgende Variante des Post'schen Korrespondenzproblemes entscheidbar ist.

gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$,
wobei $x_i,\ y_i \in \{0, 1\}^+$.

gefragt: Gibt es Folgen von Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n,\ n \geq 1$,
und $j_1, j_2, \ldots, j_m,\ m \geq 1$ mit $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_m}$?

6. Aufgabe: In der *monadischen* Prädikatenlogik dürfen die Formeln keine Funktionssymbole enthalten und alle Prädikate müssen einstellig (monadisch) sein.
Man zeige: Falls eine *Aussage* F der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatensymbol P_1 erfüllbar ist, dann gibt es bereits ein Modell für F der Mächtigkeit 2. Hieraus folgere man, dass das Erfüllbarkeits- (und Gültigkeits-) problem für Formeln der monadischen Prädikatenlogik mit nur einem einstelligen Prädikatsymbol entscheidbar ist!
Hinweis: Man zeige, dass der Grundbereich eines jeden Modells $\mathcal{A}$ für F in 2 Äquivalenzklassen unterteilt werden kann. Die Äquivalenz zweier Elemente $u, v \in U_{\mathcal{A}}$ ergibt sich aus ihrem gleichartigen Verhalten bzgl. $P_1^{\mathcal{A}}$. Sodann kann man ein neues Modell $\mathcal{B}$ für F definieren, wobei die Elemente von $U_{\mathcal{B}}$ gerade diese Äquivalenzklassen sind.