Prof. Dr. A. Goerdt
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2011/2012
03.11.2011

Theorie der Programmiersprachen

4. Übung

1. Aufgabe: Beweisen Sie mithilfe der Resolutionsmethode, dass man die Unerfüllbarkeit einer Formel in 2-KNF in polynomieller Zeit zeigen kann.

2. Aufgabe: Zeigen Sie, dass folgende Einschränkung des Resolutionskalküls vollständig ist:

> Es darf nur dann ein Resolvent aus den Klauseln K_1 und K_2 gebildet werden, wenn der Resolvent keine Tautologie darstellt.

3. Aufgabe: Wir betrachten den folgenden Satz:

> Gegeben sei eine Funktion $f : A \to B$, wobei $|A| = n + 1$ und $|B| = n$ gilt. Also z.B. $A = \{1, 2, \dots, n + 1\}$ und $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Dann gibt es Elemente $i_1, i_2 \in A, i_1 \neq i_2$ und ein $j \in B$ mit der Eigenschaft $j = f(i_1) = f(i_2)$.
>
> Mit anderen Worten: Mindestens zwei verschiedenen Elementen aus A muss dasselbe Element aus B zugeordnet werden.

Als aussagenlogische Formel kann dieser Satz folgendermaßen formuliert werden. Wir benutzen $(n + 1) \cdot n$ Variablen $x_{i,j}, i \in A, j \in B$ mit der gedachten Bedeutung

$$\mathcal{A}(x_{i,j}) = 1 \Leftrightarrow i \text{ wird auf } j \text{ begebildet.}$$

Dann ist $\left(\bigwedge_{i\in A} \bigvee_{i\in B} x_{i,j}\right) \to \left(\bigvee_{k\in B} \bigvee_{i,j\in A, i\neq j} (x_{i,k} \wedge x_{j,k})\right)$ oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
\big((x_{1,1} \vee x_{1,2} \vee \dots \vee x_{1,n})\wedge &\\
(x_{2,1} \vee x_{2,2} \vee \dots \vee x_{2,n})\wedge &\\
\dots\wedge &\\
(x_{n+1,1} \vee x_{n+1,2} \vee \dots \vee x_{n+1,n})\big) &\quad\to\quad \big((x_{1,1} \wedge x_{2,1}) \vee \dots \vee (x_{1,1} \wedge x_{n+1,1}) \vee \\
&\qquad\quad (x_{2,1} \wedge x_{3,1}) \vee \dots \vee (x_{2,1} \wedge x_{n+1,1}) \vee \\
&\qquad\quad \dots \vee (x_{n,1} \wedge x_{n+1,1}) \vee \\
&\qquad\quad (x_{1,n} \wedge x_{2,n}) \vee \dots \vee (x_{1,n} \wedge x_{n+1,n}) \vee \\
&\qquad\quad (x_{2,n} \wedge x_{3,n}) \vee \dots \vee (x_{2,n} \wedge x_{n+1,n}) \vee \\
&\qquad\quad \dots \vee (x_{n,n} \wedge x_{n+1,n})\big)
\end{aligned}$$

eine Tautologie. Die Negation dieser Formel läßt sich leicht als KNF schreiben und muss widersprüchlich sein.

(a) Leiten Sie den Resolutionsbeweis für $n = 3$ her. (Gehen Sie dazu spaltenweise vor.)

(b) Machen Sie sich klar, dass am Ende des Beweises alle $n+1$ Klauseln der Art

$$\begin{gathered} x_{1,n} \vee x_{2,n} \vee \ldots \vee x_{n,n} \\ x_{1,n} \vee x_{2,n} \vee \ldots \vee x_{n-1,n} \vee x_{n+1,n} \\ \vdots \\ x_{2,n} \vee x_{3,n} \vee \ldots \vee x_{n+1,n} \end{gathered}$$

benötigt werden. Wieviele Resolutionsschritte werden im Allgemeinen benötigt?

4. Aufgabe: Formulieren Sie folgendes Prinzip als widersprüchliche aussagenlogische Formel und weisen Sie mittels Resolutionsmethode nach, dass die entstehenden Formeln unerfüllbar sind:

> Eine Menge mit N Elementen (N ungerade) lässt sich nicht in disjunkte zweielementige Mengen einteilen.

Hinweis: Verwenden Sie die Variablen $A_{i,j}, i < j$, mit der Bedeutung

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \text{ und } j \text{ bilden eine zweielementige Menge} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel: $\{1,2,3,4\}$ lässt sich in $\{1,2\}$ und $\{3,4\}$ zerlegen. Die Menge $\{1,2,3\}$ lässt sich nicht derart einteilen.

5. Aufgabe: Wiederholen Sie die Begriffe der Prädikatenlogik! Bestimmen Sie dazu von folgenden Formeln alle

- Teilformeln
- Terme
- atomaren Formeln
- Prädikatsymbole, Funktionssymbole, Konstanten, Variablen
- alle frei vorkommenden Variablen (welche Variablen sind wo gebunden?)
- die Matrix.

$$\begin{aligned} F_1 &= (\exists x_3 P_1^3(x_1, f_1^2(x_2, x_3), f_2^1(x_1))) \vee (\forall x_2 P_2^1(f_3^2(x_2, x_1))) \vee (\exists x_2 \neg P_3^2(x_3, f_4^1(x_2))) \\ F_2 &= ((Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), z) \wedge Q(a))) \vee \forall z R(x, z, g(x))) \end{aligned}$$

6. Aufgabe: Man formuliere die Definition der stetigen Funktionen in Prädikatenlogik!