

# Theorie der Programmiersprachen

## 2. Übung

**1. Aufgabe:** Demonstrieren Sie den Lauf des Polynomialzeitalgorithmus für Hornformeln anhand eines selbstgewählten Beispiels. Geben Sie eine möglichst gute Laufzeitabschätzung bei Formelgröße  $m$  und Variablenzahl  $n$  an.

**2. Aufgabe:** (*Craig'scher Interpolationssatz*)

Es gelte  $\models (F \rightarrow G)$  und es gibt mindestens eine atomare Formel, die sowohl in  $F$  als auch in  $G$  vorkommt. Man beweise, daß es eine Formel  $H$  gibt, die nur aus atomaren Formeln aufgebaut ist, die sowohl in  $F$  als auch in  $G$  vorkommen, mit  $\models (F \rightarrow H)$  und  $\models (H \rightarrow G)$ .

*Hinweis:* Induktion über die Anzahl der atomaren Formeln, die in  $F$ , aber nicht in  $G$  vorkommen.

Andere Möglichkeit: Konstruieren einer Wahrheitstafel für  $H$  anhand der Wahrheitstafeln von  $F$  und  $G$ .

**3. Aufgabe:** Übersetzen Sie folgende aussagenlogische Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente 3-KNF.

$$(x \vee \neg y) \longleftrightarrow (y \wedge z)$$

**4. Aufgabe:** Sei  $L$  eine beliebige unendliche Menge von natürlichen Zahlen, dargestellt als Binärzahlen. Beweisen Sie, daß es eine unendliche Folge  $w_1, w_2, w_3, \dots$  von paarweise verschiedenen Binärzahlen gibt, so daß  $w_i$  Anfangsstück von  $w_{i+1}$  und von mindestens einem Element aus  $L$  ist ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ).

**5. Aufgabe:** Man gebe eine Formel an, zu der es keine äquivalente Hornformel gibt und begründe, warum dies so ist.

**6. Aufgabe:** Eine Formelmenge  $M_0$  heißt ein *Axiomensystem* für eine Formelmenge  $M$ , falls

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist Modell für } M_0\} = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist Modell für } M\}.$$

$M$  heißt *endlich axiomatisierbar*, falls es ein endliches Axiomensystem für  $M$  gibt. Es sei  $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$  ein Axiomensystem für eine gewisse Menge  $M$ , wobei für  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt:  $\models (F_{n+1} \rightarrow F_n)$  und  $\not\models (F_n \rightarrow F_{n+1})$ . Man zeige:  $M$  ist nicht endlich axiomatisierbar. Zeigen Sie dafür zunächst: Die Menge  $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$  enthält unendlich viele Atomformeln.