Prof. Dr. A. Goerdt
A. Lanka
L. Falke

TU Chemnitz
Wintersemester 2009/2010
08.01.2010

Theoretische Informatik I

11. Übung

Geben Sie die Lösungen der Aufgaben *1, 3c und 3d* bitte bis zum *15.01.2010* bei Ihrem Übungsleiter ab.

1. Aufgabe: Zeigen Sie durch Abzählen:

> In jedem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gibt es einen Schnitt (S_1, S_2), in dem (mindestens) die Hälfte aller Kanten liegen.

Hinweis: Betrachten sie alle möglichen Schnitte und überlegen Sie, zu wievielen dieser Schnitte eine Kante gehören kann.

2. Aufgabe: Versuchen Sie für die folgende Formel in $3-KNF$ eine erfüllende Belegung der Variablen zu finden.

$$\begin{aligned} F \;=\; & (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee \bar{c} \vee d) \wedge (\bar{a} \vee c \vee d) \wedge (\bar{a} \vee \bar{c} \vee d) \wedge \\ & (b \vee c \vee \bar{d}) \wedge (b \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \wedge (\bar{b} \vee c \vee \bar{d}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \end{aligned}$$

Verwenden Sie für die Suche die Idee aus der Vorlesung, nach einer Klausel zu verzweigen. Die Formel F enthalte eine Klausel C mit den Literalen x, y und z. Dann gilt:

$$F \text{ ist erfüllbar} \Leftrightarrow F_{|x=1} \text{ oder } F_{|x=0,y=1} \text{ oder } F_{|x=0,y=0,z=1} \text{ ist erfüllbar.}$$

(a) Zeichnen Sie den Aufrufbaum.

(b) Zeigen Sie, dass der Aufrufbaum bei diesem Vorgehen weniger als 2^n Blätter hat.

3. Aufgabe: Wir betrachten die Branch-and-Bound-Schranken $S_1, \ldots, S_4$ der Vorlesung für das TSP.

(a) Zeigen Sie für $i = 1, 2, 3$ $S_i(M) = S_i(M^t)$, wobei M^t die zu M transponierte Matrix ist.

(b) Zeigen Sie $S_2(M) \leq S_3(M) \leq S_1(M)$.

(c) Finden Sie eine Beispielmatrix M, für die $S_4(M) \neq S_4(M^t)$ ist und geben Sie jeweils den Wert der Schranke an.

(d) Finden Sie eine Matrix M, so dass $S_4(M) < S_3(M) < S_4(M^t)$ gilt und geben Sie jeweils den Wert der Schranke an.

(e) Zeigen Sie, $S_3(M) \leq \max\{S_4(M), S_4(M^t)\}$.

4. Aufgabe: Der offizielle Branch-and-Bound-Algorithmus am Beispiel des Handlungsreisenden funktioniert folgendermaßen:

- Es wird eine Art Breitensuche im Backtracking-Baum durchgeführt.
- Die Front des Breitensuchbaums wird in einem Heap (angeordnet gemäß der Schranke $S(M)$) gespeichert.
- Ist das Minimum im Heap echt kleiner als das Minimum der Kosten aller bisher gefundenen Rundreisen, wird der entsprechende Knoten im Backtracking-Baum expandiert.
- Anderenfalls wird der Algorithmus beendet.

Zeichnen Sie den Baum mit der Schranke $S(M) = S_4(M)$ aus der Vorlesung und der folgenden Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 20 \\ 5 & \infty & 9 & 10 \\ 6 & 13 & \infty & 12 \\ 8 & 8 & 9 & \infty \end{pmatrix}$$

Wählen Sie für die erste Verzweigung die Kante $(1, 2)$ und machen Sie eine interessante Beobachtung!