Lösung zur 11. Übung Aufgabe 3e)

Zu zeigen ist, dass $S_3(M) \leq \max\{S_4(M), S_4(M^T)\}$ gilt. Dazu betrachten wir zunächst die Schranke S_3 für M und M^T.

$$\begin{aligned} S_3(M) &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M(u,v) + M(v,w) | u, w \in V\} \\ S_3(M^T) &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M^T(u,v) + M^T(v,w) | u, w \in V\} \end{aligned}$$

Aus $M^T(u,v) := M(v,u)$ folgt nun für $S_3(M^T)$:

$$\begin{aligned} S_3(M^T) &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M^T(u,v) + M^T(v,w) | u, w \in V\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_v \min\{M(v,u) + M(w,v) | u, w \in V\} \\ &= S_3(M) \end{aligned}$$

Wir betrachten weiterhin die Summe aus $S_3(M)$ und $S_3(M^T)$.

$$\begin{aligned} S_3(M) + S_3(M^T) &= S_3(M) + S_3(M) \\ 2S_3(M) &= \sum_v \min\{M(u,v) + M(v,w) | u, w \in V\} \\ &= \sum_v (\min\{M(u,v) | u \in V\} + \min\{M(v,w) | w \in V\}) \\ &= \underbrace{\sum_v \min\{M(u,v) | u \in V\}}_{\text{Minimum der Spalte } v} + \underbrace{\sum_v \min\{M(v,w) | w \in V\}}_{\text{Minimum der Zeile } v} \end{aligned}$$

Für die Schranke S_4 gilt nach der Bestimmung der Zeilenminima folgendes:

$$\begin{aligned} S_4(M) &= \underbrace{\sum_v \min\{M(v,w) | w \in V\}}_{\text{Minimum der Zeile } v} + S'_4(\widehat{M}) \\ S_4(M^T) &= \sum_v \min\{M^T(v,u) | u \in V\} + S'_4(\widehat{M^T}) \\ &= \underbrace{\sum_v \min\{M(u,v) | u \in V\}}_{\text{Minimum der Spalte } v} + S'_4(\widehat{M^T}) \end{aligned}$$

$S'_4(\widehat{M})$ bezeichnet den Teil von S_4, bei dem die Minima der Spalten in $\widehat{M}$ gebildet werden. Daraus folgt für die Summe aus $S_4(M)$ und $S_4(M^T)$:

$$\begin{aligned} S_4(M) + S_4(M^T) &= \sum_v \min\{M(v,w)|w \in V\} + S'_4(\widehat{M}) \\ &\quad + \sum_v \min\{M(u,v)|u \in V\} + S'_4(\widehat{M^T}) \\ &= S_3(M) + S_3(M^T) + \underbrace{S'_4(\widehat{M}) + S'_4(\widehat{M^T})}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$S_4(M) + S_4(M^T) \geq \underbrace{S_3(M) + S_3(M^T)}_{=2S_3(M)}$$

Ersetzt man jetzt $S_4(M)$ bzw. $S_4(M^T)$ durch das größere von beidem, so erhält man

$$2\max\{S_4(M), S_4(M^T)\} \geq 2S_3(M)$$

und damit

$$S_3(M) \leq \max\{S_4(M), S_4(M^T)\}$$

□